ذاكرة المدرسة الجزائرية
www.manuelsanciens.com

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الجزء الثاني

الرياضيات

السنة الاولى من التعليم الثانوي

الشعب

- رياضيات
- رياضيات تقنية
- علوم



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية والتكوين

الرِّيَاضِيَّاتُ

السنة الاولى من التعليم الثانوي
الجزء الثاني

الشعب

- رياضيات
- رياضيات تقنية
- علوم



المعهد التربوي الوطني ـ الجزائر

1989 _ 1988

202

الباب السادس

المعادلات والمتراجحات

تعتبر المواضيع الواردة في هذا الباب من أهم المواضيع المدروسة في السنة الأولى من التعليم الثانوي ، إذ أنها تمكن التلميذ من التحكم في آليات الحساب الجبري مثل النشر ، التحليل والاختزال . وتدربه على الاستعمال الدقيق والسليم للتكافؤات والاستلزامات وأنها تزوده بالوسائل والأدوات الرياضية التي يحتاج إليها في الدروس المقبلة ، إذ لها تطبيقات كثيرة ومفيدة مثلاً في دراسة الدوال وفي دراسة إشارة المشتقات .

20 كثيرات الحدود

1 ـ كثيرات الحدود لمتغير حقيقي :

1.1 ـ وحيدات الحدّ لمتغير حقيقي

التعريف

إذا كان أ عدداً حقيقياً وكان ن عدداً طبيعياً فإن : الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي أ $س^ن$ تسمى دالة وحيد الحدّ .

- العدد الحقيقي أ $س^ن$ يدعى **وحيد الحدّ** للمتغير الحقيقي س .
- العدد الحقيقي أ يسمى **معامل** وحيد الحدّ أ $س^ن$.
- إذا كان أ $\neq 0$ فإن العدد الطبيعي ن يسمى **درجة** وحيد الحدّ أ $س^ن$
- إذا كان أ $= 0$ فإن وحيد الحدّ أ $س^ن$ يسمى **وحيد الحدّ المعدوم** .
  نلاحظ أن درجة وحيد الحدّ المعدوم **غير معينة** .
- وحيدات الحدّ التي لها نفس الدرجة تسمى **وحيدات الحدّ المتشابهة** .
- أمثلة :

1) -2 $س^3$ هو وحيد حدّ درجته 3 ومعامله (-2)

2) $(1-\sqrt{2})$ $س^4$ هو وحيد حدّ درجته 4 ومعامله $(1-\sqrt{2})$

3) كل عدد حقيقي **ثابت** أ هو وحيد حدّ درجته 0 ومعامله أ .

4) $\frac{1}{س}$ وَ $2\sqrt{س}$ ليسا وحيدي حدّ لأنه لا يمكن كتابتهما على الشكل أ $س^ن$ مع ن عدد طبيعي .

2.1 ـ كثيرات الحدود لمتغير حقيقي

التعريف

كثير الحدود للمتغير الحقيقي س هو مجموع وحيدات حدّ للمتغير الحقيقي س .

مثال :

ك (س) = − 4 س^{2} + 5 س^{5} + س^{3} − 3 س^{2} + 2 س − س^{3} − 8 − 8 س + 4 .

ك (س) هو كثير حدود للمتغير الحقيقي س .

باستعمال قواعد الحساب في ح يمكن كتابته كما يلي :

ك (س) = 5 س^{5} − 7 س^{2} − 6 س − 4 .

وهذه الكتابة تسمى **الشكل المبسط والمرتب** لكثير الحدود ك (س)

- **الدالة كثير الحدود .**

الدالة تا التي ترفق بكل عدد حقيقي س كثير الحدود تا (س) تسمى **دالة كثير الحدود .**

- **كثير الحدود المعدوم**

كثير الحدود المعدوم هو كثير حدود تا (س) يحقق ما يلي :

∀ س ∍ ح : تا (س) = 0

- **الكتابة العامة لكثير حدود مبسط غير معدوم .**

يمكن كتابة أي كثير حدود تا (س) مبسط ومرتب وغير معدوم على الشكل العام التالي :

$$\text{تا(س)} = ا_{ن}\text{س}^{ن} + ا_{ن-1}\text{س}^{ن-1} + ... + ا_{1}\text{س} + ا_{0} \quad \text{حيث } ا_{ن} \neq 0$$

- العدد الطبيعي ن يسمى **درجة كثير الحدود تا (س) .**
- وحيدات الحدّ $ا_{ن}$ س^{ن} ؛ $ا_{ن-1}$ س$^{ن-1}$ ؛ ..... $ا_{1}$ س ؛ $ا_{0}$ تسمى **حدود كثير الحدود تا (س) .**
- الأعداد الحقيقية $ا_{ن}$ ، $ا_{ن-1}$ ؛ ..... ؛ $ا_{1}$ ؛ $ا_{0}$ تسمى **معاملات كثير الحدود تا (س) .**

أمثلة :

1) كل كثير حدود من الدرجة الأولى يكتب على الشكل العام :

$$ا س + ب \quad \text{حيث } ا \neq 0$$

2) كل كثير حدود من الدرجة الثانية يكتب على الشكل العام :

$$ا س^2 + ب س + حـ \quad \text{حيث } ا \neq 0$$

3) كل كثير حدود من الدرجة الثالثة يكتب على الشكل العام :

$$ا س^3 + ب س^2 + حـ س + ء \quad \text{حيث } ا \neq 0$$

درجتا مجموع وجداء كثيري حدود

نذكر فيما يلي نتيجتين تتعلقان بدرجتي مجموع وجداء كثيري حدود .

• إن درجة مجموع كثيري حدود هي أصغر من أو تساوي درجة كثير الحدود الذي له أكبر درجة

مثلاً : إذا كان

1) تا (س) = س^2 − س وَ ها (س) = − س^2 + 2 س + 1

فإن تا (س) + ها (س) = س + 1

نلاحظ في هذا المثال أن درجة (تا (س) + ها (س)) تساوي 1 وهي أصغر من درجتي تا (س) و ها (س) .

2) ك (س) = س^3 − 2 وَ ها (س) = − س^2 + 2 س + 1

فإن ك (س) + ها (س) = س^3 − س^2 + 2 س − 1

نلاحظ في هذا المثال أن درجة (ك (س) + ها (س)) تساوي درجة ك (س) الذي له أكبر درجة .

• إن درجة جداء كثيري حدود تساوي مجموع درجتيهما

مثلاً : إذا كان

تا (س) = س^3 − س وَ ها (س) = − س^2 + 2 س − 1

فإن تا (س) × ها (س) = − س^5 + 2 س^4 − 2 س^2 + س

نلاحظ أن درجة(تا (س) × ها (س))هي 5 وتساوي مجموع درجتي تا (س) و ها (س) .

3.1 ـ كثير الحدود المعدوم

لقد رأينا أن كثير الحدود المعدوم هو كثير الحدود تا (س) بحيث :

∀ س ∈ ح   تا (س) = 0

نقبل النتيجة التالية :

يكونُ كثيرُ حدودٍ مبسط كثيرَ الحدود المعدوم إذا وفقط إذا كانت كل معاملاته معدومة .

أي بعبارة أخرى :

[∀ س ∈ ح : أ$_{ه}$ س^{ه} + أ$_{ه-1}$ س$^{ه-1}$ + ... + أ$_{0}$ = 0] ⟺ أ$_{ه}$ = أ$_{ه-1}$ = ... = أ$_{0}$ = 0

تطبيق : يمكن استعمال هذه النتيجة للبحث عن العنصر الحيادي لعملية داخلية

مثلاً : إذا كانت ★ عملية داخلية في ح حيث :

س ★ ع = (س + 2) (ع + 2) − 2

فإن العنصر الحيادي ه (إن وجد) معرف كما يلي :

∀ س ∈ ح : س ★ ه = س (لأن ★ عملية تبديلية)

[∀ س ∈ ح : س ★ ه = س]

⟺ [∀ س ∈ ح : (س + 2) (ه + 2) − 2 = س]

⟺ [∀ س ∈ ح : (ه + 1) س + (2 ه + 2) = 0] (1)

القضية (1) تعني أن كثير الحدود (ه + 1) س + (2 ه + 2) هو كثير الحدود المعدوم .

إذن :

$$\left[\forall \text{س} \in \mathbb{ح} : (\text{هـ} + 1)\text{س} + (2\text{هـ} + 2) = 0 \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\text{هـ} + 1 = 0 \text{ وَ } 2\text{هـ} + 2 = 0 \right)$$

أي : $\text{هـ} = -1$

إذن العنصر الحيادي للعملية ★ هو (-1) .

4.1 ـ تساوي كثيري حدود

التعريف

> يتساوى كثيرا الحدود تا (س) و ها (س) إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :
>
> $\forall \text{س} \in \mathbb{ح} : \text{تا}(\text{س}) = \text{ها}(\text{س})$

نقبل النظرية التالية :

يتساوى كثيرا حدود مبسطان إذا وَفقط إذا كانت لها نفس الدرجة وكانت معاملات وحيدات الحدّ المتشابهة فيهما متساوية

مثلاً :

$$\text{تا}(\text{س}) = (\text{أ} + 1)\text{س}^2 - \text{ب}\,\text{س} + \text{حـ}$$

$$\text{ها}(\text{س}) = 2\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{س} + 2\text{ب}$$

يتساوى كثيرا الحدود تا (س) و ها (س) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \text{أ} + 1 = 2\text{أ} \\ \text{وَ} \\ -\text{ب} = 1 \\ \text{وَ} \\ \text{حـ} = 2\text{ب} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \text{أ} = 1 \\ \text{وَ} \\ \text{ب} = -1 \\ \text{وَ} \\ \text{حـ} = -2 \end{cases}$$

2 ـ كثيرات الحدود لمتغيرين حقيقيين :

1.2 ـ وحيدات الحدّ لمتغيرين حقيقيين

التعريف

> ن ، هـ عددان طبيعيان ؛ أ عدد حقيقي .
> الدالة التي ترفق بكل ثنائية (س ، ع) من ح × ح العدد الحقيقي أ سⁿ عʰ تسمى دالة وحيد الحدّ للمتغيرين الحقيقيين س ، ع

- العدد الحقيقي أ سⁿ عʰ يسمى **وحيدّ حدّ للمتغيرين الحقيقيين س ، ع**.
- العدد الحقيقي أ هو **معامل** وحيد الحدّ أ سⁿ عʰ .
- إذا كان أ ≠ 0 فإن :

ـ العدد الطبيعي ن هو درجة وحيد الحدّ أ سⁿ عʰ بالنسبة إلى المتغير س.

ـ العدد الطبيعي هـ هو درجة وحيد الحدّ أ سⁿ عʰ بالنسبة إلى المتغير ع .

ـ درجة وحيد الحدّ أ سⁿ عʰ بالنسبة إلى المتغيرين س ، ع هو (ن + هـ) .

- إذا كان أ = 0 فإن وحيد الحدّ أ سⁿ عʰ يسمى **وحيد الحدّ المعدوم** .

مثال :

2 س ع^2 (− س^2 ع)^2 هو وحيد حدّ للمتغيرين الحقيقيين س ، ع ويمكن كتابته كما يلي :

2 س ع^2 (− س^2 ع)^2 = 2 س (س^4) ع^4

= 2 س^5 ع^4

إن 2 س^5 ع^4 هو وحيد الحدّ المبسط لوحيد الحدّ 2 س ع^2 (− س^2 ع)^2 .

معامله هو 2 ؛ درجته بالنسبة إلى المتغير س هي 5 ؛

درجته بالنسبة إلى المتغير ع هي 4 .

درجته بالنسبة إلى المتغيرين س ، ع هي 9 .

2.2 ـ كثيرات الحدود لمتغيرين حقيقيين :

التعريف

كثير حدود للمتغيرين الحقيقيين س ، ع هو مجموع وحيدات حدّ للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

أمثلة :

1) $س^2 - (1 + \sqrt{2})$ س $ع^3$ هو كثير حدود للمتغيرين س ، ع درجته 2 بالنسبة إلى المتغير س و 3 بالنسبة إلى المتغير ع و 4 بالنسبة إلى المتغيرين س ، ع .

2) $\frac{1}{س^2} - (1 + \sqrt{2})$ س $ع^3$ ليس كثير حدود .

3) تا (س ، ع) = $-\frac{1}{2}$ س $ع^4 + \sqrt{2}$ $س^3 ع^2 - س^2 ع^3$ هو كثير حدود للمتغيرين س ، ع .

درجته 3 بالنسبة إلى المتغير س و 4 بالنسبة إلى المتغير ع و 5 بالنسبة إلى المتغيرين س ، ع .

نلاحظ أن كل حدّ من تا (س ، ع) له نفس الدرجة بالنسبة إلى المتغيرين س ، ع .

يدعى ، في هذه الحالة ، تا (س ، ع) **كثير حدود متجانس** من الدرجة 5 .

4) س $ع^4$ + س ع − $س^3 ع^2$ هو كثير حدود غير متجانس .

3 ـ تحليل كثير حدود :

إن تحليل كثير حدود هو كتابته على شكل جداء كثيرات حدود .
نذكر فيما يلي بعض القواعد التي تسمح بتحليل كثير حدود .

1.3 ـ التحليل بواسطة عامل مشترك

يمكن كتابة مجموع جداءات لها عامل مشترك على شكل جداء حسب القاعدة التالية :

أ س + أ ع + أ ص = أ (س + ع + ص)

أمثلة :

1) 5 س^2 ع^2 − 2 س^3 ع = س^2 ع (5 ع − 2 س)

2) س ع + س − ع − 1 = س (ع + 1) − (ع + 1)

= (ع + 1) (س − 1)

3) س^3 + س ع + س^2 ع + ع^2 = (س^3 + س^2 ع) + (س ع + ع^2)

= س^2 (س + ع) + ع (س + ع)

= (س + ع) (س^2 + ع)

2.3 ـ التحليل باستعمال المتطابقات الشهيرة :

نذكر فيما يلي بعض المتطابقات الشهيرة المدروسة خلال السنوات السابقة .

(أ + ب)^2 = أ^2 + 2 أ ب + ب^2
(أ − ب)^2 = أ^2 − 2 أ ب + ب^2
(أ + ب) (أ − ب) = أ^2 − ب^2
(أ + ب)^3 = أ^3 + 3 أ^2 ب + 3 أ ب^2 + ب^3
(أ − ب)^3 = أ^3 − 3 أ^2 ب + 3 أ ب^2 − ب^3
أ^3 + ب^3 = (أ + ب) (أ^2 − أ ب + ب^2)
أ^3 − ب^3 = (أ − ب) (أ^2 + أ ب + ب^2)

أمثلة : توضّح الأمثلة التالية فكرة استعمال المتطابقات الشهيرة في تحليل كثيرات الحدود .

1) تا (س) = (4 س − 3)^2 − (7 س − 1)^2

تا (س) = (4 س − 3 + 7 س − 1) (4 س − 3 − 7 س + 1)

= (11 س − 4) (− 3 س − 2)

= − (11 س − 4) (3 س + 2)

2) تا (س) = س^{4} + 2 س^{2} + 1

= (س^{2} + 1)^{2}

3) تا (س) = س^{3} − 2 س^{2} + س

= س (س^{2} − 2 س + 1)

= س (س − 1)^{2}

4) تا (س) = 8 س^{3} + 12 س^{2} + 6 س + 1

= (2 س + 1)^{3}

5) تا (س) = س^{3} − 8

= (س − 2) (س^{2} + 2 س + 4)

6) تا (س) = س^{4} − 1

= (س^{2} − 1) (س^{2} + 1)

= (س − 1) (س + 1) (س^{2} + 1)

4 ـ جذور كثير حدود :

1.4 التعريف

يكون العدد الحقيقي α جذراً لكثير الحدود تا (س) إذا وفقط إذا كان تا (α) = 0

مثلا :

- العددان 2 و (− 2) هما جذران لكثير الحدود تا (س) = س^{2} − 4
لأن تا (2) = 0 و تا (− 2) = 0
- الأعداد (− 1) ، 0 ، 1 ليست جذوراً لكثير الحدود
تا (س) = س^{2} − 4 لأن : تا (− 1) $\neq$ 0 و تا (0) $\neq$ 0 و تا (1) $\neq$ 0

2.4 ـ النظرية

> إذا كان α جذراً لكثير حدود تا (س)، فإنه يوجد كثير حدود ك (س) يحقق ما يلي :
>
> تا (س) = (س − α) . ك (س)

ملاحظة :

إذا كانت درجة كثير الحدود تا (س) هي ن فإن درجة كثير الحدود ك (س) هي (ن − 1) .

مثال : تا (س) = س^{3} − 5 س^{2} + 5 س − 1

نلاحظ أن تا (1) = 0 . إذن العدد 1 هو جذر لكثير الحدود تا (س) .

حسب النظرية السابقة ، يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية (أ س^{2} + ب س + حـ) بحيث يكون :

تا (س) = (س − 1) (أ س^{2} + ب س + حـ)

أي تا (س) = أ س^{3} + (ب − أ) س^{2} + (حـ − ب) س − حـ

وبتطبيق نظرية تساوي كثيري حدود نستنتج أن :

أ = 1
ب − أ = − 5
حـ − ب = + 5
− حـ = − 1

أي

أ = 1
ب = − 4
حـ = 1

إذن : تا (س) = (س − 1) (س^{2} − 4 س + 1)

5 ـ الدوال الناطقة والكسور الناطقة :

1.5 ـ التعريف

> تا (س) و ها (س) كثيرا حدود .
>
> الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي $\frac{\text{تا (س)}}{\text{ها (س)}}$ تسمى دالة ناطقة

• العدد الحقيقي $\frac{تا(س)}{ها(س)}$ يسمى كسراً ناطقاً

• يكون الكسر الناطق $\frac{تا(س)}{ها(س)}$ معرفاً إذا وفقط إذا كان مقامه ها (س) يختلف عن الصفر .

أمثلة :

1) ك (س) = $\frac{س - 1}{س^2 + 1}$ هو كسر ناطق معرف في مجموعة الأعداد الحقيقية لأن : ∀ س ∋ ح : $س^2 + 1 \neq 0$

2) كا (س) = $\frac{2س - 3}{س - 1}$ هو كسر ناطق معرف في المجموعة ح − { 1 }

2.5 ـ اختزال الكسور الناطقة

توضح الأمثلة التالية كيفية اختزال الكسور الناطقة :

المثال 1 : ك (س) = $\frac{س^2 - 1}{س^2 - 2س + 1}$

تكون الدالة الناطقة ك معرفة إذا وفقط إذا كان

$س^2 - 2س + 1 \neq 0$

أي $(س - 1)^2 \neq 0$ أي $س \neq 1$

إذن مجموعة التعريف ف للدالة ك هي ف = ح − { 1 }

لنختزل ك (س) . لدينا : $س^2 - 1 = (س - 1)(س + 1)$

$س^2 - 2س + 1 = (س - 1)^2$

ومنه : ك (س) = $\frac{(س - 1)(س + 1)}{(س - 1)^2}$

لما س ∋ ف يكون : $س - 1 \neq 0$

يمكن،عندئذ ، قسمة حدّي الكسر ك (س) على (س − 1)

فنحصل على : $ك(س) = \frac{س + 1}{س - 1}$

إذن ∀ س ∈ ف : $ك(س) = \frac{س + 1}{س - 1}$

المثال 2 : $ل(س) = \frac{س^3 - 1}{س^2 - 1}$

تكون الدالة الناطقة ل معرفة إذا وفقط إذا كان :

$$س^2 - 1 \neq 0$$

أي (س − 1) (س + 1) ≠ 0 أي س ≠ 1 و س ≠ −1

إذن مجموعة التعريف ف للدالة ل هي ف = ح − { −1 ، +1 }

لنختزل ل (س) .

لدينا : $س^3 - 1 = (س - 1)(س^2 + س + 1)$

$$س^2 - 1 = (س - 1)(س + 1)$$

ومنه : $ل(س) = \frac{(س - 1)(س^2 + س + 1)}{(س - 1)(س + 1)}$

لما س ∈ ف يكون س − 1 ≠ 0

يمكن ، عندئذ ، قسمة حدّي الكسر ل (س) على (س − 1)

فنحصل على : $ل(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س + 1}$

إذن ∀ س ∈ ف : $ل(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س + 1}$

ملاحظة : لتكن الدالة الناطقة ها المعرفة كما يلي :

$ها(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س + 1}$ ، الدالتان الناطقتان ل وَ ها غير متساويتين

لأن مجموعتي تعريفهما مختلفتان .

مثال 3 :

$$تا(س) = \frac{س^3 + 1}{س + 1}$$

تكون الدالة الناطقة تا معرفة إذ وفقط إذا كان

. $س + 1 \neq 0$ أي $س \neq -1$.

إن مجموعة التعريف ف للدالة تا هي ف $= ح - \{-1\}$

لنختزل تا (س) .

لدينا : $س^3 + 1 = (س + 1)(س^2 - س + 1)$

ومنه : $تا(س) = \frac{(س + 1)(س^2 - س + 1)}{س + 1}$

لما س $\in$ ف يكون $س + 1 \neq 0$

يمكن ، عندئذ ، قسمة حدّي الكسر تا (س) على (س + 1)

فنحصل على $تا(س) = س^2 - س + 1$

إذن $\forall$ س $\in ح - \{-1\}$: $تا(س) = س^2 - س + 1$

ملاحظة :

لتكن الدالة كثير الحدود ها حيث $ها(س) = س^2 - س + 1$

الدالتان تا و ها غير متساويتين لأن مجموعتي تعريفهما مختلفتان .

---

21 المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى

1 ـ عموميات :

1.1 ـ مفهوم المعادلة

إذا كانت تا و ها دالتين لمجموعة ك في مجموعة ل فإن حل المعادلة تا (س) = ها (س) في المجموعة ك يعني تعيين مجموعة العناصر س من ك التي لها نفس الصورة بواسطة الدالتين تا و ها .
هذه المجموعة تسمى **مجموعة حلول** المعادلة تا (س) = ها (س) في ك .

مثال 1 :

تا و ها دالتان للمجموعة ح في نفسها حيث :

تا (س) = 3 س^2 − س − 5 ؛ ها (س) = 2 س^2 − 2 س + 1

العددان 2 و (− 3) حلان للمعادلة تا (س) = ها (س)

لأن : تا (2) = ها (2) وَ تا (− 3) = ها (− 3)

بينما الأعداد (− 2) ، 0 ، $\sqrt{2}$ ليست حلولا لهذه المعادلة

لأن : تا (− 2) ≠ ها (− 2) ؛ تا (0) ≠ ها (0) ؛

تا ($\sqrt{2}$) ≠ ها ($\sqrt{2}$) .

مثال 2 :

تا وَ ها دالتان للمجموعة ح في نفسها حيث :

تا (س) = س^2 ؛ ها (س) = س

لنبحث عن ي مجموعة حلول المعادلة تا (س) = ها (س) .

أولا : إذا كان α عنصراً من ي فإنه يحقق المساواة

$\alpha^2 = \alpha$ أي $\alpha^2 - \alpha = 0$

وَبالتالي : $\alpha(\alpha - 1) = 0$

وهذا يعني أن : $\alpha = 0$ أو $\alpha = 1$

إذن $\alpha \in \{0 ، 1\}$. أي ي $\subset \{0 ، 1\}$ (1)

ثانياً : من الواضح أن العددين 0 وَ 1 حلان للمعادلة المعطاة لأن

تا (0) = ها (0) وَ تا (1) = ها (1) .

إذن $\{0 ، 1\} \subset$ ي (2)

من (1) وَ (2) نستنتج : ي $= \{0 ، 1\}$

2.1 ـ مفهوم المتراجحة

إذا كانت تا وَ ها دالتين لمجموعة ك في مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

فإن حل المتراجحة تا (س) $\geqslant$ ها (س)

(أو تا (س) $>$ ها (س)) في ك يعني تعيين مجموعة

العناصر س من ك التي تحقق المتباينة تا (س) $\geqslant$ ها (س)

(أو تا (س) $>$ ها (س))

هذه المجموعة تسمى **مجموعة حلول** المتراجحة

تا (س) $\geqslant$ ها (س) (أو تا (س) $>$ ها (س))

مثال 1 :

تا وَ ها دالتان للمجموعة ح في ح حيث :

تا (س) = س^2 ؛ ها (س) = س .

الأعداد (-1) ، 0 ، 1 ليست حلولاً للمتراجحة تا (س) > ها (س)
لأن المتباينات التالية غير محققة :
تا (-1) > ها (-1) ؛ تا (0) > ها (0) ؛ تا (1) > ها (1) .

بينما الأعداد $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هي حلول لهذه المتراجحة لأن المتباينات التالية محققة .

تا $\left(\frac{1}{2}\right)$ > ها $\left(\frac{1}{2}\right)$ ؛

تا $\left(\frac{1}{4}\right)$ > ها $\left(\frac{1}{4}\right)$ ؛

تا $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ > ها $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 :

تا و ها دالتان للمجموعة ح في نفسها حيث

تا (س) = $-$ س + 2 ؛ ها (س) = س $-$ 4

لنبحث عن ي مجموعة حلول المترجحة تا (س) $\leqslant$ ها (س) .

أولاً : إذا كان α عنصراً من ي فإنه يحقق المتباينة التالية :

$-\alpha + 2 \leqslant \alpha - 4$ أي $6 \leqslant 2\alpha$ وهذا يعني أن $3 \leqslant \alpha$

إذن $\alpha \ni]-\infty ، 3[$

ومنه ي $\supset]-\infty ، 3[$ (1)

ثانياً : إذا كان α عنصراً من المجال $]-\infty ، 3[$ فإنه يحقق المتباينة

$3 \leqslant \alpha$ أي $6 \leqslant 2\alpha$

من المتباينة السابقة نستنتج :

$6 - (\alpha + 4) \leqslant 2\alpha - (\alpha + 4)$

أي : $-\alpha+2 \leqslant -\alpha-4$ ،

أي : تا (α) ⩽ ها (α)

إذن إذا كان α عنصراً من المجال] $-\infty$ ، 3 [فإنه حل للمتراجحة

تا (س) ⩽ ها (س)

أي : α ∈ ي

وَمنه] $-\infty$ ، 3 [⊂ ي (2)

من (1) وَ (2) نستنتج : ي =] $-\infty$ ، 3 [

3.1 ـ المعادلات المتكافئة . المتراجحات المتكافئة :

التعريف

تكون معادلتان (أو متراجحتان) معرفتان على نفس المجموعة متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

• إذا كانت (م$_1$) وَ (م$_2$) معادلتين (أو متراجحتين) متكافئتين نكتب :

(م$_1$) ⟺ (م$_2$)

• **مثلاً** :

المعادلتان س^2 = س وَ س (س − 1) = 0 متكافئتان .

إذا كانت (م$_1$) معادلة (أو متراجحة) فإنه يمكن إيجاد معادلة (أو متراجحة) (م$_2$) مكافئة لها سهلة الحل وذلك باستعمال القواعد التالية :

القاعدة 1

إذا كانت تا ، ها وَ عا ثلاث دوال معرفة على نفس المجموعة فإن :

• تا (س) = ها (س) ⟺ تا (س) + عا (س) = ها (س) + عا (س)

• تا (س) ⩾ ها (س) ⟺ تا (س) + عا (س) ⩾ ها (س) + عا (س)

بالخصوص إذا كان عا (س) = تا (س) − ها (س) فإن :

• تا (س) = ها (س) ⟺ تا (س) − ها (س) = 0

• تا (س) ⩽ ها (س) ⟺ تا (س) − ها (س) ⩽ 0

مثلاً :

المعادلة 2 س^2 + 1 = س^2 − 2 س + 1 (م) مكافئة

للمعادلة 2 س^2 + 1 − س^2 + 2 س − 1 = 0

أي س^2 + 2 س = 0

إذن (م) ⟺ س^2 + 2 س = 0

القاعدة 2

> إذا كانت تا وَ ها دالتين معرفتين على نفس المجموعة وكان λ عدداً حقيقياً غير معدوم فإن :
>
> تا (س) = ها (س) ⟺ λ تا (س) = λ ها (س)

مثلاً :

المعادلة 2 س^2 − 4 س + 2 = 0 في ح مكافئة

للمعادلة $\frac{1}{2}$ (2 س^2 − 4 س + 2) = 0

أي : س^2 − 2 س + 1 = 0

أي (س − 1)^2 = 0

إذن 2 س^2 − 4 س + 2 = 0 ⟺ (س − 1)^2 = 0

القاعدة 3

> إذا كانت تا وَ ها دالتين معرفتين على نفس المجموعة وكان λ عدداً حقيقياً غير معدوم فإن :
>
> • تا (س) ⩽ ها (س) ⟺ λ تا (س) ⩽ λ ها (س) إذا كان λ موجباً
>
> • تا (س) ⩽ ها (س) ⟺ λ تا (س) ⩾ λ ها (س) إذا كان λ سالباً

مثال

المتراجحة $\frac{س}{3}$ 3 ⩾ 2 س مكافئة

للمتراجحة 2 س + 18 ⩾ 1

(بضرب طرفي المتراجحة في العدد 6)

أي : -10 س $+ 15 \geqslant 0$

بالقسمة على (-5) نحصل على 2 س $- 3 \leqslant 0$

إذن :

$$\frac{س}{3} + 3 \geqslant 2 س + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 س - 3 \leqslant 0 .$$

2 ـ المعادلات من الشكل ا س + ب = 0

1.2 ـ المعادلات من الدرجة الأولى :

التعريف :

نسمي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول س كل معادلة من الشكل ا س + ب = 0 حيث ا و ب عددان حيقيان معلومان وَ ا $\neq 0$.

بما أن ا $\neq 0$ فإن : ا س + ب = 0 $\Leftrightarrow$ س = $-\frac{ب}{ا}$

إذن :

كل معادلة من الدرجة الأولى ا س + ب = 0 تقبل ، في ح ، **حلا وحيداً** هو $\left(-\frac{ب}{ا} \right)$

2.2 ـ المعادلات من الشكل $ا$ س + $ب$ = 0

لقد رأينا فيما سبق أن كل معادلة من الشكل $ا$ س + $ب$ = 0 تقبل حلاً وحيداً إذا كان $ا \neq 0$.

لندرس الآن الحالة التي يكون فيها $ا = 0$.

لما $ا = 0$ المعادلة $ا$ س + $ب$ = 0 تكتب 0 س + $ب$ = 0

أي 0 س = − $ب$

الطرف الأول لهذه المعادلة يساوي الصفر مهما يكن العدد الحقيقي س .

أما الطرف الثاني (− $ب$) فهو معطى :

- إذا كان $ب$ = 0 فإن كل عدد حقيقي س يحقق المساواة 0 س = − $ب$ فهو إذاً حل للمعادلة 0 س = − $ب$
- إذا كان $ب \neq 0$ فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المساواة 0 س = − $ب$

وبالتالي المعادلة 0 س = − $ب$ ليس لها حل في ح .

الخلاصة :

لتكن ، في ح ، المعادلة $ا$ س + $ب$ = 0
وَلتكن ي مجموعة حلولها .

- إذا كان $ا \neq 0$ فإن ي = { $-\frac{ب}{ا}$ }
- إذا كان $ا = 0$ وَ $ب = 0$ فإن ي = ح
- إذا كان $ا = 0$ وَ $ب \neq 0$ فإن ي = ϕ

مثال 1 :

نعتبر ، في ح ، المعادلة $\frac{س}{3} + 3 = 2$ س $+ \frac{1}{2}$ (1)

لدينا :

$$\frac{\text{س}}{3} + 3 = 2\,\text{س} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\,\text{س} + 18 = 12\,\text{س} + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 15 = 10\,\text{س}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{س} = \frac{3}{2}$$

إذن المعادلة (1) تقبل ، في ح ، حلا وحيداً هو $\frac{3}{2}$

وَمجموعة حلولها هي $\{\frac{3}{2}\}$

مثال 2 : نعتبر ، في ح ، المعادلة :

$$3\,(3\,\text{س} + 4) - 2\,\text{س} = 5\,(\text{س} - 1) + 2\,(\text{س} + 1) \qquad (2)$$

لدينا : (2) $\Leftrightarrow 9\,\text{س} + 12 - 2\,\text{س} = 5\,\text{س} - 5 + 2\,\text{س} + 2$

$$\Leftrightarrow 7\,\text{س} + 12 = 7\,\text{س} - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 0\,\text{س} = -15$$

المعادلة (2) ليس لها حل

وَ مجموعة حلولها هي ϕ .

مثال 3 : نعتبر ، في ح ، المعادلة :

$$\frac{2\,\text{س} - 5}{3} = \frac{4\,\text{س} - 2}{6} - \frac{4}{3} \qquad (3)$$

لدينا : (3) $\Leftrightarrow 2\,(2\,\text{س} - 5) = 4\,\text{س} - 2 - 8$

$$\Leftrightarrow 4\,\text{س} - 10 = 4\,\text{س} - 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 0\,\text{س} = 0$$

إذن كل عدد حقيقي هو حل للمعادلة (3)

وَ مجموعة حلولها هي ح .

3 ـ المتراجحات من الشكل $أ$ س + $ب \leqslant 0$

1.3 ـ المتراجحات من الدرجة الأولى :

التعريف : نسمي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهول س كل متراجحة من الشكل $أ$ س + $ب \leqslant 0$

(أو $أ$ س + $ب > 0$ أو $أ$ س + $ب \geqslant 0$ أو $أ$ س + $ب < 0$)

حيث $أ$ وَ $ب$ عددان حقيقيان معلومان و $أ \neq 0$

حل المتراجحة من الدرجة الأولى $أ$ س + $ب \leqslant 0$

لدينا : $أ$ س + $ب \leqslant 0 \Leftrightarrow أ$ س $\leqslant - ب$ (1)

بما أن $أ \neq 0$ فإنه يمكن ضرب طرفي المتراجحة (1) في العدد $\frac{1}{أ}$ فنحصل على :

س $\leqslant - \frac{ب}{أ}$ إذا كان $أ$ موجباً .

أو س $\geqslant - \frac{ب}{أ}$ إذا كان $أ$ سالباً .

إذن :

- إذا كان $أ > 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $أ$ س + $ب \leqslant 0$

هي المجال $]-\infty ، - \frac{ب}{أ}]$

- إذا كان $أ < 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $أ$ س + $ب \leqslant 0$

هي المجال $[- \frac{ب}{أ} ، +\infty[$

مثال 1 : نعتبر ، في ح ، المتراجحة

4 س + 7 $\leqslant$ 5 س + 2 − (3 س + 5) (1)

لدينا :

$$(1) \iff 4\text{س} + 7 \leqslant 5\text{س} + 2 - 3\text{س} - 5$$

$$\iff 4\text{س} + 7 \leqslant 2\text{س} - 3$$

$$\iff 2\text{س} \geqslant -10$$

$$\iff \text{س} \geqslant -5$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجال $[-5 \text{ ، } +\infty[$

مثال 2 : نعتبر ، في ح ، المتراجحة :

$$\frac{2\text{س} - 1}{3} - \frac{\text{س} + 1}{6} < \frac{2\text{س} + 5}{2} \qquad (2)$$

لدينا : $(2) \iff 2(2\text{س} - 1) - (\text{س} + 1) < 3(2\text{س} + 5)$

$$\iff 4\text{س} - 2 - \text{س} - 1 < 6\text{س} + 15$$

$$\iff -3\text{س} < 18$$

$$\iff \text{س} > -6$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي المجال $]-6 \text{ ؛ } +\infty[$

2.3 ـ المتراجحات من الشكل $\text{أ}\text{س} + \text{ب} \leqslant 0$

لقد تعرّفنا فيما سبق على حلول المتراجحة $\text{أ}\text{س} + \text{ب} \leqslant 0$ لما $\text{أ} \neq 0$.

لندرس الآن الحالة التي يكون فيها $\text{أ} = 0$.

في هذه الحالة المتراجحة $\text{أ}\text{س} + \text{ب} \leqslant 0$ تكتب :

$$0\text{س} + \text{ب} \leqslant 0 \quad \text{أي} \quad 0\text{س} \leqslant -\text{ب}$$

الطرف الأول لهذه المتراجحة يساوي الصفر مهما يكن العدد الحقيقي س .

أما الطرف الثاني $(-\text{ب})$ فهو معطى :

- إذا كان $\text{ب} < 0$ فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المتباينة $0\text{س} > -\text{ب}$ وَ بالتالي

المتراجحة 0 س ⩾ − ب ليس لها أي حل في ح .

- إذا كان ب ⩾ 0 فإن كل عدد حقيقي س يحقق المتباينة 0 س ⩾ − ب فهو إذاً حل للمتراجحة 0 س ⩾ − ب

الخلاصة :

لتكن ، في ح ، المتراجحة أ س + ب ⩾ 0
ولتكن ي مجموعة حلولها .

- إذا كان أ > 0 فإن ي = $]-\infty \text{ ، } -\frac{\text{ب}}{\text{أ}}]$
- إذا كان أ < 0 فإن ي = $[-\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ، } +\infty[$
- إذا كان أ = 0 وَ ب ⩾ 0 فإن ي = ح
- إذا كان أ = 0 وَ ب < 0 فإن ي = ϕ

5 ـ تمارين محلولة :

التمرين الأول :

حل ، في ح ، المعادلة ذات المجهول س

$$\frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 2} = \frac{5}{(3 - \text{س})(\text{س} - 2)} \quad (1)$$

تكون المعادلة (1) معرفة إذا وفقط إذا كان :

س − 2 ≠ 0 وَ (3 − س) (س − 2) ≠ 0

أي س ≠ 2 وَ س ≠ 3

وَ بالتالي تكون مجموعة التعريف ف لهذه المعادلة هي

ف = ح − { 2 ، 3 }

مهما يكن س $\in$ ف لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\text{س}+3}{\text{س}-2} - \frac{5}{(3-\text{س})(\text{س}-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\text{س}+3)(3-\text{س})-5}{(3-\text{س})(\text{س}-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\text{س}+3)(3-\text{س})-5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{س}^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\text{س}+2)(\text{س}-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = -2 \quad \text{أو} \quad \text{س} = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = -2 \quad (\text{لأن } 2 \notin \text{ف})$$

إذن :

مجموعة الحلول للمعادلة (1) هي ي = $\{-2\}$

التمرين الثاني :

حل ، في ح ، المعادلة ذات المجهول س :
$3|\text{س}+2| - |\text{س}+1| = 4 \quad (2)$

لنضع ك (س) = $3|\text{س}+2| - |\text{س}+1|$

ولنكتب ك (س) بدون استعمال رمز القيمة المطلقة

لدينا :

$|\text{س}+2| = \text{س}+2$ إذا كان $\text{س} \geqslant -2$

وَ

$|\text{س}+2| = -\text{س}-2$ إذا كان $\text{س} \leqslant -2$

$|\text{س}+1| = \text{س}+1$ إذا كان $\text{س} \geqslant -1$

وَ

$|\text{س}+1| = -\text{س}-1$ إذا كان $\text{س} \leqslant -1$

الجدول التالي يبيّن كتابة ك (س) حسب قيم س .

س	$-\infty$ ، -2	-2 ، -1	-1 ، $+\infty$
$\lvert 3\text{س}+2\rvert$	$-3\text{س}-6$	$3\text{س}+6$	$3\text{س}+6$
$\lvert \text{س}+1\rvert$	$-\text{س}-1$	$-\text{س}-1$	$\text{س}+1$
ك (س)	$-2\text{س}-5$	$4\text{س}+7$	$2\text{س}+5$

• في المجال $]-\infty ، -2]$ لدينا :

$$(2) \Leftrightarrow -2\text{س}-5=4$$

$$\Leftrightarrow \text{س}=-\frac{9}{2}$$

العدد $\left(-\frac{9}{2}\right)$ هو حل للمعادلة (2) لأن $\left(-\frac{9}{2}\right)$ ينتمي إلى المجال $]-\infty ، -2]$

• في المجال $[-2 ، -1]$ لدينا :

$$(2) \Leftrightarrow 4\text{س}+7=4$$

$$\Leftrightarrow \text{س}=-\frac{3}{4}$$

العدد $\left(-\frac{3}{4}\right)$ ليس حلاًّ للمعادلة (2) لأن $\left(-\frac{3}{4}\right)$ لا ينتمي إلى المجال $[-2 ، -1]$

• في المجال $[-1 ، +\infty[$ لدينا :

$$(2) \Leftrightarrow 2\text{س}+5=4$$

$$\Leftrightarrow \text{س}=-\frac{1}{2}$$

العدد $\left(-\frac{1}{2}\right)$ حل للمعادلة (2) لأن $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ينتمي إلى

المجال $]-1 ، +\infty[$

• إذن مجموعة حلول المعادلة (2) هي : $\left\{-\frac{9}{2} ، -\frac{1}{2}\right\}$

التمرين الثالث :

حل ، في ح ، المعادلة ط (ط س − 3) = س + 3 (3)
حيث س هو المجهول وَ ط عدد حقيقي معلوم نسميه **وسيطاً** .

لدينا : (3) ⟸⟹ ط² س − 3 ط = س + 3

⟸⟹ ط² س − س = 3 ط + 3

⟸⟹ (ط² − 1) س = 3 (ط + 1) (3′)

المناقشة :

• إذا كان ط² − 1 = 0 أي ط = 1 أو ط = − 1 فإن المعادلة (3′) ليست من الدرجة الأولى :

ـ إذا كان ط = 1 فإن (3′) تكتب 0 س = 6
وَ مجموعة حلولها هي ϕ

ـ إذا كان ط = − 1 فإن (3′) تكتب 0 س = 0
وَ مجموعة حلولها هي ح

• إذا كان ط² − 1 ≠ 0 أي ط ≠ 1 وَ ط ≠ − 1

فإن المعادلة (3′) من الدرجة الأولى ولها حل وحيد هو :

$$\frac{3(\text{ط}+1)}{\text{ط}^2-1} \quad \text{أي} \quad \frac{3}{\text{ط}-1}$$

التمرين الرابع :

حل ، في ح ، الجملة :

$$(ج)\quad \begin{cases} 1 - 3س \leqslant \frac{1}{2}س - 3 & (أ) \\ وَ & \\ \frac{1}{2}س - 3 < 2س + 5 & (ب) \end{cases}$$

لتكن $ي_1$ وَ $ي_2$ مجموعتي حلول المتراجحتين (أ) وَ (ب) على الترتيب .

مجموعة حلول الجملة (جـ) هي المجموعة $ي_1 \cap ي_2$.

• **لنعيّن المجموعة $ي_1$**

لدينا : (أ) $\Leftrightarrow 1 + 3 \leqslant 3س + \frac{1}{2}س$

$$\Leftrightarrow 4 \leqslant \frac{7}{2}س$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{7} \leqslant س$$

ومنه $ي_1 = [\frac{8}{7}, +\infty[$

$\frac{8}{7}$ $ي_1$

• **لنعيّن المجموعة $ي_2$**

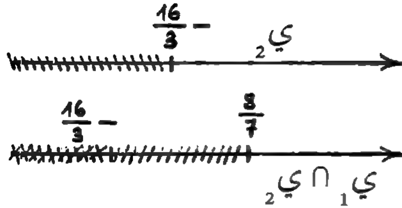
لدينا : (ب) $\Leftrightarrow -3 - 5 < 2س - \frac{1}{2}س$

$$\Leftrightarrow -8 < \frac{3}{2}س$$

$$\Leftrightarrow -\frac{16}{3} < س$$

ومنه $ي_2 = \left[-\frac{16}{3} ، +\infty \right[$

إذن $ي_1 \cap ي_2 = \left] \frac{8}{7} ، +\infty \right[$



التمرين الخامس :

> حل ، في ح ، المتراجحة :
>
> $(2 - ط)\, س < 3\,(ط + 1)$ (م)
>
> حيث س هو المجهول و ط وسيط حقيقي .

- إذا كان $2 - ط = 0$ أي $ط = 2$ فإن المتراجحة (م) تكتب $0\,س < 9$ وَمجموعة حلولها هي المجموعة ح
- إذا كان $2 - ط > 0$ أي $ط < 2$ فإن :

$$(2 - ط)\, س < 3\,(ط + 1) \Leftrightarrow س < \frac{3\,(ط + 1)}{2 - ط}$$

وَمجموعة حلول (م) هي المجال $\left] -\infty ، \frac{3\,(ط + 1)}{2 - ط} \right[$

- إذا كان $2 - ط < 0$ أي $ط > 2$ فإن :

$$(2 - ط)\, س < 3\,(ط + 1) \Leftrightarrow س > \frac{3\,(ط + 1)}{2 - ط}$$

وَمجموعة حلول (م) هي المجال : $\left] \frac{3\,(ط + 1)}{2 - ط} ، +\infty \right[$

22 المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

1 ـ المعادلات من الدرجة الثانية

1.1 ـ التعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي س
كل معادلة من الشكل $أ س^2 + ب س + حـ = 0$
حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية معلومة وَ $أ \neq 0$

2.1 ـ حل معادلات بسيطة من الدرجة الثانية

1) حل المعادلة : $3 س^2 + 5 س = 0$ في المجموعة ح

لدينا : $3 س^2 + 5 س = 0 \Leftrightarrow س (3 س + 5) = 0$

$\Leftrightarrow س = 0$ أو $س = -\frac{5}{3}$

إذن :

0 وَ $\left(-\frac{5}{3}\right)$ هما حلاَ المعادلة $3 س^2 + 5 س = 0$

2) حل ، في ح ، المعادلة : $(س - 2)^2 = 9$

لدينا : $(س - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (س - 2)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (س - 2 - 3)(س - 2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (س - 5)(س + 1) = 0$

$\Leftrightarrow س = 5$ أو $س = -1$

إذن :

5 وَ (-1) هما حلا المعادلة $(س - 2)^2 = 9$

3) حل ، في ح ، المعادلة : $س^2 + 6 س - 7 = 0$

لدينا : $س^2 + 6 س = س^2 + 2.3 س + (3)^2 - (3)^2$

$= (س + 3)^2 - 9$

ومنه : $س^2 + 6س - 7 = (س + 3)^2 - 9 - 7$

$= (س + 3)^2 - 16$

$= (س + 3 - 4)(س + 3 + 4)$

$= (س - 1)(س + 7)$

إذن : $س^2 + 6س - 7 = 0 \Leftrightarrow (س - 1)(س + 7) = 0$

$\Leftrightarrow س = 1$ أو $س = -7$

1 وَ (-7) هما حلا المعادلة $س^2 + 6س - 7 = 0$

4) حل ، في ح ، المعادلة $س^2 - س + 1 = 0$

لدينا : $س^2 - س = س^2 - 2 \times \frac{1}{2}س + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

ومنه $س^2 - س + 1 = \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$

$= \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

نلاحظ أنه : $\forall$ س $\in$ ح $\left(س - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$

وبالتالي : $\forall$ س $\in$ ح $\left(س - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

إذن المعادلة $س^2 - س + 1 = 0$ لا تقبل أي حل .

5) حل ، في ح ، المعادلة 2 س$^2 - 5$ س $+ 3 = 0$ (1)

لدينا : 2 س$^2 - 5$ س $+ 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} + \frac{3}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} + \frac{3}{2} = 0$$

بما أن :

$$\text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} = \text{س}^2 - 2 \times \frac{5}{4}\text{س} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$= \left(\text{س} - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}$$

نحصل على :

$$\text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\text{س} - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{س} - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{س} - \frac{3}{2}\right)\left(\text{س} - 1\right) = 0$$

إذن : $\frac{3}{2}$ وَ 1 هما حلا المعادلة 2 س$^2 - 5$ س $+ 3 = 0$

3.1 ـ الشكل النموذجي لكثير الحدود من الدرجة الثانية .

ليكن أ س^2 + ب س + حـ كثير حدود من الدرجة الثانية .

بما أن أ $\neq 0$ فإن :

$$\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = \text{أ}\left[\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}\right]$$

$$= \text{أ}\left[\text{س}^2 + 2\cdot\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\text{س} + \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 + \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}\right]$$

$$= \text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2}{4\text{أ}^2} + \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}\right]$$

$$= \text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{حـ}}{4\text{أ}^2}\right]$$

إذن :

يمكن كتابة كثير الحدود من الدرجة الثانية $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{حـ}$ على الشكل

$$\text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{حـ}}{4\text{أ}^2}\right]$$

الذي يسمى **شكله النموذجي .**

4.1 ـ حل معادلة من الدرجة الثانية

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{حـ} = 0$ (1)

لدينا

$$(1) \Longleftrightarrow \text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{حـ}}{4\text{أ}^2}\right] = 0$$

(باستعمال الشكل النموذجي)

$$\Longleftrightarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{حـ}}{4\text{أ}^2} = 0 \quad (\text{لأن } \text{أ} \neq 0)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{حـ}}{4\text{أ}^2} \quad (2)$$

نلاحظ أن الطرف الأول لهذه المعادلة مربع فهو إذاً موجب .
أما الطرف الثاني فهو كسر مقامه موجب تماماً وَإشارته إذاً هي إشارة بسطه الذي يسمى **مميز المعادلة** وَ يرمز إليه بالرمز Δ

$$\boxed{\Delta = ب^2 - 4 أ حـ}$$

إذن :
لحل المعادلة (1) نميز ثلاث حالات حسب إشارة Δ

الحالة الأولى $\Delta < 0$

المعادلة (2) تكتب : $\left(س + \frac{ب}{2 أ} \right)^2 = \frac{\Delta}{4 أ^2}$ (3)

بما أن $\frac{\Delta}{4 أ^2} < 0$ و $\left[\forall \, س \in ح \quad \left(س + \frac{ب}{2 أ} \right)^2 \geqslant 0 \right]$

فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المعادلة (3)
إذن : في هذه الحالة ليس للمعادلة (1) أي حل .

الحالة الثانية $\Delta = 0$

المعادلة (2) تكتب : $\left(س + \frac{ب}{2 أ} \right)^2 = 0$

أي $\left(س + \frac{ب}{2 أ} \right) \left(س + \frac{ب}{2 أ} \right) = 0$

إذن المعادلة المعطاة لها حلان يساويان $\left(- \frac{ب}{2 أ} \right)$

العدد $\left(- \frac{ب}{2 أ} \right)$ يدعى **حلاً مضاعفا** لهذه المعادلة

الحالة الثالثة $\Delta > 0$

يمكن كتابة Δ على الشكل $\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ وَالمعادلة (2) تصبح مكافئة للمعادلة التالية :

$$\left(س + \frac{ب}{2أ}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2أ}\right)^2 = 0$$

أي : $\left(س + \frac{ب}{2أ} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2أ}\right)\left(س + \frac{ب}{2أ} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2أ}\right) = 0$

وبالتالي : $\left(س - \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ}\right)\left(س - \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}\right) = 0$

إذن : في هذه الحالة المعادلة المعطاة لها حلان متمايزان هما :

$$س' = \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ} \quad وَ \quad س'' = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4أح}}{2أ}$$

الخلاصة

لتكن ، في ح ، المعادلة من الدرجة الثانية :

$أس^2 + ب س + ح = 0$ (1)

وليكن Δ مميزها ($\Delta = ب^2 - 4أح$)

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة (1) لا تقبل أي حل .
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلاً مضاعفاً هو $\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$
- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلّين متمايزين هما :

$$س' = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ} \quad وَ \quad س'' = \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}$$

ملاحظات :

1) من الدراسة السابقة نستنتج أنه إذا كان للمعادلة من الدرجة الثانية

$$ا س^2 + ب س + ح = 0$$

حلان س′ ، س″ فإنه يمكن كتابتها على الشكل :

$$ا (س - س′) (س - س″) = 0$$

2) إذا كان العددان الحقيقيان ا ، ح من إشارتين مختلفتين فإنه يكون

ا ح $<$ 0 ومنه ب^2 − 4 ا ح $>$ 0

وبالتالي المعادلة ا س^2 + ب س + ح = 0 تقبل حلين متمايزين .

3) إذا كان ب = 2 ب′ فإنه يمكن أن نكتب :

Δ = (2 ب′)^2 − 4 ا ح أي Δ = 4 [ب′^{2} − ا ح]

إشارة Δ هي إذاً نفس إشارة العدد (ب′^{2} − ا ح) الذي يدعى **المميز المختصر** ويرمز اليه بالرمز Δ' .

إذا كان ب = 2 ب′ وكان $\Delta' > 0$ فإن عبارتي الحلّين س′ و س″ تصبحان :

$$س' = \frac{-ب' - \sqrt{\Delta'}}{ا} \quad و \quad س'' = \frac{-ب' + \sqrt{\Delta'}}{ا}$$

5.1 ـ أمثلة :

مثال 1 : حل ، في ح ، المعادلة : − 2 س^2 + 3 س + 5 = 0 (1)

المعادلة (1) من الشكل ا س^2 + ب س + ح = 0

ا = −2 ؛ ب = 3 ؛ ح = 5

لدينا : Δ = ب^2 − 4 ا ح

Δ = 3^2 − 4 (− 2) (5) = 49

بما أن $\Delta > 0$ فالمعادلة (1) تقبل ، في ح ، حلين متمايزين هما :

$س' = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ}$ أي : $س' = \frac{-3-7}{2(-2)} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$

و

$س'' = \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}$ أي $س'' = \frac{-3+7}{2(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$

مثال 2 : حلّ ، في ح ، المعادلة : $س^2 - 2\sqrt{3}\,س + 3 = 0$ (2)

المعادلة (2) من الشكل $أس^2 + ب س + حـ = 0$

$أ = +1$ ؛ $ب = -2\sqrt{3}$ ؛ $حـ = 3$

لدينا : $\Delta = ب^2 - 4أحـ$

$= (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(3) = 0$

بما أن $\Delta = 0$ فالمعادلة (2) تقبل ، في ح ، حلاً مضاعفاً

هو $س' = س'' = \frac{-ب}{2أ}$

أي $س' = س'' = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

مثال 3 : حل ؛ في ح ؛ المعادلة : $-2س^2 + 6س - 5 = 0$ (3)

المعادلة (3) من الشكل $أس^2 + ب س + حـ = 0$

$أ = -2$ ؛ $ب = 6$ ؛ $حـ = -5$

لدينا : $\Delta = ب^2 - 4أحـ$

$= 6^2 - 4(-2)(-5)$

$= -4$

بما أن $\Delta < 0$ فالمعادلة (3) لا تقبل حلا .

مثال 4 : حل ، في ح ، المعادلة : $3 س^2 + 26 س + 16 = 0$ (4)

المعادلة (4) من الشكل $ا س^2 + ب س + حـ = 0$

$ا = 3$ ؛ $ب = 26$ ؛ $حـ = 16$

لنحسب المميز المختصر Δ'

$\Delta' = ب'^2 - ا حـ$

$\Delta' = (13)^2 - 3(16) = 121$

بما أن $\Delta' > 0$ فإن المعادلة (4) تقبل حلّين هما :

$س' = \frac{-ب' - \sqrt{\Delta'}}{ا}$ و $س'' = \frac{-ب' + \sqrt{\Delta'}}{ا}$

أي :

$س' = \frac{-13 - \sqrt{121}}{3}$ و $س'' = \frac{-13 + \sqrt{121}}{3}$

أي : $س' = -8$ و $س'' = -\frac{2}{3}$

ملاحظة : لحل المعادلة (4) يمكن استعمال المميز Δ

فنجد $\Delta = 484$ والحسابات تكون أكثر صعوبة

مثال 5 : حل ، في ح ، المعادلة :

$(ط - 1) س^2 + 2 (ط + 1) س + ط = 0$ (5)

حيث س هو المجهول و ط **وسيط حقيقي**

1 • إذا كان $ط - 1 = 0$ أي $ط = 1$ فإن المعادلة (5)

تكتب $4 س + 1 = 0$

فهي إذاً معادلة من الدرجة الأولى ولها حل وحيد هو $\left(-\frac{1}{4}\right)$

2 • إذا كان $\text{ط} - 1 \neq 0$ أي $\text{ط} \neq 1$ فإن المعادلة (5) تصبح معادلة من الدرجة الثانية وهي من الشكل

$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{حـ} = 0$:

$\text{أ} = \text{ط} - 1$ ؛ $\text{ب} = 2(\text{ط} + 1)$ ؛ $\text{حـ} = \text{ط}$

لنحسب المميز المختصر Δ' :

$\Delta' = (\text{ط} + 1)^2 - (\text{ط} - 1)(\text{ط})$

$= 3\,\text{ط} + 1$

ـ إذا كان $3\,\text{ط} + 1 < 0$ أي $\text{ط} < -\frac{1}{3}$ فإن المعادلة (5) لا تقبل حلاًّ .

ـ إذا كان $3\,\text{ط} + 1 = 0$ أي $\text{ط} = -\frac{1}{3}$ فإن المعادلة (5) تقبل حلاًّ مضاعفاً

هو $\left(-\frac{2(\text{ط}+1)}{2(\text{ط}-1)}\right)$ أي $\left(\frac{1}{2}\right)$

ـ إذا كان $3\,\text{ط} + 1 > 0$

أي $\text{ط} \in \left]-\frac{1}{3} \text{ ، } 1\right[\cup \left]1 \text{ ، } +\infty\right[$.

فإن المعادلة (5) تقبل حلّين متمايزين هما :

$$\text{س}' = \frac{-(\text{ط}+1) - \sqrt{3\,\text{ط}+1}}{\text{ط}-1}$$

$$\text{س}'' = \frac{-(\text{ط}+1) + \sqrt{3\,\text{ط}+1}}{\text{ط}-1}$$

2 ـ المتراجحات من الدرجة الثانية

1.2 ـ إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية

ليكن تا (س) كثير حدود من الدرجة الثانية

تا (س) = ا $س^2$ + ب س + حـ   (ا $\neq 0$)

لقد رأينا فيما سبق أن :

$$ا س^2 + ب س + حـ = ا \left[\left(س + \frac{ب}{2ا} \right)^2 - \frac{ب^2 - 4 ا حـ}{4 ا^2} \right]$$

أي $تا (س) = ا \left[\left(س + \frac{ب}{2ا} \right)^2 - \frac{\Delta}{4 ا^2} \right]$

لدينا ثلاث حالات حسب إشارة Δ .

الحالة الأولى $\Delta < 0$

بما أن : $\forall$ س $\in$ ح $\left(س + \frac{ب}{2ا} \right)^2 \geqslant 0$ و $- \frac{\Delta}{4 ا^2} > 0$

فإنه $\forall$ س $\in$ ح $\left(س + \frac{ب}{2ا} \right)^2 - \frac{\Delta}{4 ا^2} > 0$

وَبالتالي تا (س) لا ينعدم وإشارته هي إشارة ا وهذا مهما يكن العدد الحقيقي س .

الحالة الثانية $\Delta = 0$

في هذه الحالة يكون $تا (س) = ا \left(س + \frac{ب}{2ا} \right)^2$

ينعدم تا (س) من أجل $س = - \frac{ب}{2ا}$

وإشارة تا (س) هي إشارة أ من أجل كل عدد حقيقي س يختلف عن

$$\left(-\frac{ب}{2أ} \right).$$

الحالة الثالثة $\Delta > 0$

في هذه الحالة يكون

$$تا(س) = أ \left[س - \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ} \right] \left[س - \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ} \right]$$

أي تا (س) = أ (س − س′) (س − س″)

بوضع $س' = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ}$ و $س'' = \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}$

ينعدم تا (س′) من أجل س = س′ أو س = س″

وإشارة تا (س) هي إشارة الجداء أ (س − س′) (س − س″)

مهما يكن س يختلف عن س′ و س″ .

يبيّن الجدول التالي إشارة تا (س) (بفرض س′ < س″)

س	− ∞		س′		س″		+ ∞
إشارة (س − س′)	−		0	+			+
إشارة (س − س″)	−			−	0		+
إشارة (س − س′) (س − س″)	+		0	−	0		+
إشارة تا (س)	إشارة أ			إشارة (−أ)			إشارة أ

الخلاصة

ليكن تا (س) كثير الحدود من الدرجة الثانية :

$$\text{تا}(\text{س}) = \text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ}$$

وليكن Δ مميزه ($\Delta = \text{ب}^2 - 4\text{أحـ}$)

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن تا (س) لا ينعدم وإشارته هي إشارة أ وهذا مهما يكن العدد الحقيقي س .

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن تا (س) يقبل جذراً مضاعفاً $\left(-\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)$

وإشارته هي إشارة أ وهذا مهما يكن س يختلف عن $\left(-\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)$

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن تا (س) يقبل جذرين متمايزين

س′ و س″ (س′ < س″) وإشارة تا (س) هي :

إشارة أ إذا وفقط إذا كان س ∈] − ∞ ، س′ [∪] س″ ، + ∞ [

إشارة (− أ) إذا وفقط إذا كان س ∈] س′ ، س″ [

$\Delta < 0$

إشارة أ

$\Delta = 0$

س′ = س″

إشارة أ   إشارة أ

$\Delta > 0$

س′   س″

إشارة أ   إشارة (− أ)   إشارة أ

2.2 ـ حل متراجحة من الدرجة الثانية

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة من الشكل

$0 \geqslant$ ا س^2 + ب س + حـ (أو ا س^2 + ب س + حـ > 0

أو ا س^2 + ب س + حـ $\leqslant 0$ أو ا س^2 + ب س + حـ < 0)

حيث ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية وَ ا $\neq 0$

يؤول حل المتراجحة من الدرجة الثانية ا س^2 + ب س + حـ $\geqslant 0$ (1)

إلى دراسة إشارة كثير الحدود (ا س^2 + ب س + حـ) .

وتعيين مجموعة قيم س التي تحقق (1)

مثال 1 : حل ، في ح ، المتراجحة : 2 س^2 − 3 س + 1 > 0 (1)

المتراجحة (1) هي متراجحة من الدرجة الثانية .

لندرس إشارة كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1)

لدينا : $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1$

إذن كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1) يقبل جذرين متمايزين هما :

$$\text{س}' = \frac{+3-1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{وَ} \quad \text{س}'' = \frac{+3+1}{4} = 1$$

بما أن معامل س^2 موجب فإن كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1)

يكون سالباً تماما إذا وفقط إذا كان س $\in$ $]\frac{1}{2} ، 1[$

إذن : مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجال : $]\frac{1}{2} ، 1[$

مثال 2 : حل ، في ح ، المتراجحة :
2 س^2 − س + 1 ⩾ 0 (2)

المتراجحة (2) من الدرجة الثانية .

لدينا : Δ = (− 1)^2 − 4 (+ 2) (+ 1) = − 7

بما أن Δ سالب تماماً ومعامل س^2 موجب فإن كثير الحدود .

(2 س^2 − س + 1) موجب تماماً مهما يكن العدد الحقيقي س .

إذن :

مجموعة حلول المتراجحة 2 س^2 − س + 1 ⩾ 0 هي المجموعة ح

مثال 3 : حل ، في ح ، المتراجحة :
− 4 س^2 + 2 س − 1 ⩾ 0 (3)

المتراجحة (3) من الدرجة الثانية

لندرس إشارة كثير الحدود (− 4 س^2 + 2 س − 1)

لدينا : Δ′ = (1)^2 − (− 4) (− 1) = − 3

بما أن Δ′ سالب ومعامل س^2 سالب فإن كثير الحدود

(− 4 س^2 + 2 س − 1) سالب تمامًا مهما يكن العدد الحقيقي س .

إذن :

مجموعة حلول المتراجحة : − 4س^2+2س−1⩾0 هي المجموعة ϕ

مثال 4 : حل ، في ح ، الجملة التالية :

(جـ) {
2 س^2 − 3 س + 1 ⩾ 0 (أ)
وَ
− س^2 + 2 س + 2 > 0 (ب)

لتكن ي$_1$ و ي$_2$ مجموعتي حلول المتراجحتين (أ) و (ب) على الترتيب .

مجموعة حلول الجملة (جـ) هي المجموعة ي$_1$ ∩ ي$_2$

تعيين المجموعة ي$_1$

لندرس إشارة كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1)

لدينا $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1$

كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1) يقبل جذرين متمايزين هما :

س$'$ $= \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ و س$''$ $= \frac{3+1}{4} = 1$

بما أن معامل س^2 موجب فإن كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1)
يكون موجباً إذا وفقط إذا كان

س ينتمي إلى $]-\infty , \frac{1}{2}] \cup [1 , +\infty[$

أي :

ي$_1$ = $]-\infty , \frac{1}{2}] \cup [1 , +\infty[$

تعيين المجموعة ي$_2$

لندرس إشارة كثير الحدود (− س^2 + 2 س + 2)

لدينا : $\Delta' = (1)^2 - (-1)(2) = 3$

كثير الحدود (− س^2 + 2 س + 2) يقبل جذرين متمايزين هما :

س$'$ $= \frac{-1+\sqrt{3}}{-1} = 1 - \sqrt{3}$

س$''$ $= \frac{-1-\sqrt{3}}{-1} = 1 + \sqrt{3}$

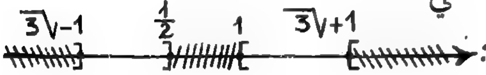
بما أن معامل س^2 سالب فإن كثير الحدود (− س^2 + 2 س + 2)
يكون موجباً تماماً إذا وفقط إذا كان

س ينتمي إلى المجال $]1-\sqrt{3} , 1+\sqrt{3}[$.

ي$_2$ = [$1 - \sqrt{3}$ ، $1 + \sqrt{3}$]



إذن مجموعة حلول الجملة (ح) هي :



ي$_1$ ∩ ي$_2$ = [$1 - \sqrt{3}$ ، $\frac{1}{2}$] ∪ [1 ، $1 + \sqrt{3}$] .

مثال 5 : لتكن المتراجحة **:**

(ط − 1) س^2 + 2 (ط + 1) س + ط > 0   (5)

حيث س هو المجهول و ط وسيط حقيقي

ولتكن ي مجموعة حلولها .

1) إذا كان ط − 1 = 0 أي ط = 1 فإن :

المتراجحة (5) تكتب : 4 س + 1 > 0 وهي متراجحة من الدرجة الأولى

ومنه ي =] − ∞ ، $-\frac{1}{4}$ [

2) إذا كان ط − 1 ≠ 0 أي ط ≠ 1 فإن المتراجحة (5)

تصبح متراجحة من الدرجة الثانية

لنضع تا (س) = (ط − 1) س^2 + 2 (ط + 1) س + ط

• إشارة مميز تا (س)

Δ' = (ط + 1)^2 − ط (ط − 1)

Δ' = 3 ط + 1

• $\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ ط = $-\frac{1}{3}$

• $\Delta' > 0 \Leftrightarrow$ ط > $-\frac{1}{3}$

• إشارة معامل س^2

معامل س^2 هو (ط − 1) ينعدم عند ط = 1

ط − 1 > 0 ⟸ ط > 1

• نحصل على الجدول التالي :

ط	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Δ'		−	0	+	‖	+	
ط − 1		−		−	0	+	

النتائج :

• إذا كان ط ∈] $-\infty$ ، $-\frac{1}{3}$ [فإن $\Delta' < 0$ وَ (ط − 1) < 0

إذن : ∀ س ∈ ح تا (س) < 0

ومنه ي = ح

• إذا كان ط ∈] $-\frac{1}{3}$ ، 1 [فإن $\Delta' > 0$ وَ (ط − 1) < 0

إذن : تا (س) يقبل جذرين متمايزين س$'$ و س$''$ (س$'$ < س$''$)

تا (س) < 0 ⟺ س ∈] $-\infty$ ، س$'$ [∪] س$''$ ، $+\infty$ [

ومنه ي =] $-\infty$ ، س$'$ [∪] س$''$ ، $+\infty$ [

• إذا كان ط ∈] 1 ، $+\infty$ [فإن $\Delta' > 0$ وَ (ط − 1) > 0

إذن تا (س) يقبل جذرين متمايزين س$'$ و س$''$ (س$'$ < س$''$)

تا (س) < 0 ⟺ س ∈] س$'$ ، س$''$ [

ومنه ي =] س$'$ ، س$''$ [

• إذا كان ط = $-\frac{1}{3}$ فإن $\Delta' = 0$ وَ (ط − 1) < 0

إذن تا (س) يقبل جذراً مضاعفاً هو $\left(-\frac{ط + 1}{ط - 1}\right)$ أي $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\forall$ س $\in$ ح $- \left\{\frac{1}{2}\right\}$: تا (س) > 0

ومنه ي $=$ ح $- \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

- إذا كان ط $= 1$ فإن ط $- 1 = 0$.

رأينا أن ي $= \left]-\infty ، -\frac{1}{4}\right[$.

3 ـ مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية :

1.3 ـ مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية :

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية :

$$أ س^2 + ب س + حـ = 0 \quad (1)$$

وليكن Δ مميزها .

إذا كان $\Delta \geqslant 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلّين متمايزين أو متساويين هما :

$$س' = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ} \quad و \quad س'' = \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}$$

لدينا :

$$س' + س'' = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ} + \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}$$

$$\boxed{س' + س'' = -\frac{ب}{أ}}$$

$$س' \times س'' = \left(\frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ} \right) \left(\frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ} \right)$$

$$= \frac{ب^2 - \Delta}{4أ^2}$$

$$= \frac{ب^2 - (ب^2 - 4أحـ)}{4أ^2}$$

$$= \frac{4أحـ}{4أ^2}$$

$$\boxed{س' . س'' = \frac{حـ}{أ}}$$

2.3 ـ حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر :

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية :

$$أ س^2 + ب س + حـ = 0$$

وليكن α حلاً معلوماً لهذه المعادلة .

يمكن حساب الحل الثاني β باستعمال إحدى المساواتين :

$$\alpha + \beta = -\frac{ب}{أ} \quad ; \quad \alpha \beta = \frac{حـ}{أ}$$

مثلاً :

لتكن المعادلة $2 س^2 - 3 س + 1 = 0$ (1)

نلاحظ أن العدد 1 هو حل لهذه المعادلة

إذن الحل الثاني هو العدد β حيث

$$1 . \beta = \frac{1}{2} \quad أي \quad \beta = \frac{1}{2}$$

3.3 ـ إشارة حلّي معادلة من الدرجة الثانية

يمكن تعيين إشارة حلّي معادلة من الدرجة الثانية بدون حسابهما عملياً وذلك بدراسة إشارة جدائهما وَ إشارة مجموعهما .

بالفعل :

- تكون لعددين إشارتان مختلفتان إذا وفقط إذا كان جداؤهما سالباً تماماً .
- تكون لعددين نفس الإشارة إذا وفقط إذا كان جداؤهما موجباً تماماً وتكون عندئذ إشارتهما هي إشارة مجموعهما .

ينتج من ذلك ما يلي :

إذا كانت $ا س^2 + ب س + ح = 0$ (1) معادلة من الدرجة الثانية وكان Δ مميزها فإن :

- $\frac{ح}{ا} < 0 \Leftrightarrow$ (للمعادلة (1) حلان إشارتاهما مختلفتان)

- $\begin{bmatrix} \frac{ح}{ا} > 0 \\ \text{وَ} \\ \Delta > 0 \\ \text{وَ} \\ -\frac{ب}{ا} > 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ (للمعادلة (1) حلان موجبان تماماً)

- $\begin{bmatrix} \frac{ح}{ا} > 0 \\ \text{وَ} \\ \Delta > 0 \\ \text{وَ} \\ -\frac{ب}{ا} < 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ (للمعادلة (1) حلان سالبان تماماً)

أمثلة :

1) المعادلة $3\text{س}^2 + 5\text{س} - 1 = 0$ هي معادلة من الشكل :

$\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = 0$

$\text{أ} = +3$ ؛ $\text{ب} = +5$ ؛ $\text{حـ} = -1$

لدينا : $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{-1}{+3} = -\frac{1}{3}$

بما أن $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} < 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلّين إشارتاهما مختلفتان .

2) المعادلة $2\text{س}^2 - 5\text{س} + 3 = 0$ هي معادلة من الشكل

$\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = 0$

$\text{أ} = +2$ ؛ $\text{ب} = -5$ ؛ $\text{حـ} = +3$

لدينا :

$$\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = +\frac{3}{2}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(3) = 1$$

$$-\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = -\frac{-5}{2} = +\frac{5}{2}$$

بما أن $\left(\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} > 0 \text{ وَ } \Delta > 0 \text{ وَ } -\frac{\text{ب}}{\text{أ}} > 0 \right)$ فإن هذه المعادلة تقبل حلّين موجبين تماماً

3) المعادلة $\text{س}^2 + 10\text{س} + 21 = 0$ هي معادلة من الشكل

$\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = 0$

$\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = 10$ ، $\text{حـ} = 21$

لدينا :

$$\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = 21$$

$$\Delta' = 25 - 21 = 4$$

$$-\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = -10$$

بما أن $\left(\frac{ح}{أ} > 0 \text{ وَ } \Delta' > 0 \text{ وَ } -\frac{ب}{أ} < 0 \right)$ فإن هذه المعادلة تقبل حلّين سالبين تماماً

4.3 ـ تمرين محلول

ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي ط ، وجود وَ إشارة حلول المعادلة :

$$(ط + 2) س^2 - (ط + 4) س + 2 - ط = 0 \quad (1)$$

- إذا كان ط + 2 = 0 أي ط = − 2 فإن المعادلة (1) تكتب : − 2 س + 4 = 0 وتقبل حلاً واحداً موجبا هو 2 .
- إذا كان ط + 2 ≠ 0 أي ط ≠ − 2 فإن المعادلة (1)

من الدرجة الثانية وهي من الشكل $أ س^2 + ب س + ح = 0$

$أ = ط + 2$ ، $ب = -(ط + 4)$ ، $ح = 2 - ط$

لدينا : $\frac{ح}{أ} = \frac{2 - ط}{ط + 2}$

إشارة $\frac{ح}{أ}$ هي إشارة الجداء $(2 - ط)(ط + 2)$ الذي هو كثير حدود

من الدرجة الثانية جذراه (-2) وَ $(+2)$

ومعامل $ط^2$ فيه هو (-1) .

$\Delta = (ط + 4)^2 - 4 (ط + 2)(2 - ط)$

$= 5 ط^2 + 8 ط$

Δ هو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه $\left(-\frac{8}{5} \right)$ وَ 0 ومعامل

$ط^2$ فيه هو $(+5)$

$-\frac{ب}{أ} = \frac{ط + 4}{ط + 2}$

إشارة $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ هي إشارة الجداء (ط + 4) (ط + 2) الذي هو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه (− 4) وَ (− 2) ومعامل $ط^2$ فيه هو (+ 1)

يبيّن الجدول التالي إشارة كل من $\frac{ح}{أ}$ و Δ و $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ والنتائج الممكنة

ط	$\frac{ح}{أ}$	Δ	$\frac{ب}{أ}$	
$-\infty$				
	−	+	+	
-4			0	يوجد حلان إشارتاهما مختلفتان
	−	+	−	
-2	0		0	حل واحد موجب يساوي 2
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
$-\frac{8}{5}$		0		حل مضاعف موجب يساوي 3
	+	−	+	لا توجد حلول
0		0		حل مضاعف موجب يساوي 1
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
2	0			حلان أحدهما معدوم والآخر موجب وهو $\frac{3}{2}$
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
$+\infty$				

23 جمل معادلات
جمل متراجحات

1 ـ عموميات :

1.1 ـ الدوال العددية لمتغيرين حقيقيين :

تسمى كل دالة للمجموعة ح × ح في المجموعة ح دالة عددية لمتغيرين حقيقيين .

أمثلة :

1) الدالة تا للمجموعة ح × ح في المجموعة ح المعرفة كما يلي :

تا (س ، ع) = س^2 + ع^2 − س + ع + 1

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

مجموعة تعريفها هي ح × ح .

لدينا مثلا : تا (1 ، 0) = 1 + 0 − 1 + 0 + 1 = 1

تا (0 ، 1) = 0 + 1 − 0 + 1 + 1 = 3

2) الدالة ها للمجموعة ح × ح في المجموعة ح المعرفة كما يلي :

ها (س ، ع) = 3 س − 2 ع + 5

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

مجموعة تعريفها هي ح × ح .

لدينا مثلا : ها (1 ، 2) = 3 × 1 − 2 × 2 + 5 = 4

ها (1 ، 4) = 3 × 1 − 2 × 4 + 5 = 0

3) الدالة لا للمجموعة ح × ح في المجموعة ح المعرفة كما يلي :

لا (س ، ع) = $\frac{س}{ع}$ + $\frac{ع}{س}$ + 1

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

مجموعة تعريفها هي $ح^* \times ح^*$

لدينا مثلا : لا $(-1 ، 2) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{1} + 1 = -\frac{3}{2}$

لا $(1 ، 1) = 1 + 1 + 1 = 3$

2.1 ـ المعادلات ذات مجهولين حقيقيين :

نسمي معادلة ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع كل معادلة من الشكل تا (س ، ع) = 0 حيث تا هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

إذا كان تا (س ، ع) كثير حدود من الدرجة الأولى نسمي المعادلة تا (س ، ع) = 0 معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع .

نسمي حلاً للمعادلة تا (س ، ع) = 0 كل ثنائية ($س_0$ ، $ع_0$) من $ح \times ح$ تحقق المساواة تا ($س_0$ ، $ع_0$) = 0 .

حل المعادلة تا (س ، ع) = 0 هو تعيين مجموعة حلولها .

أمثلة :

1) في $ح \times ح$ المعادلة $س^2 + ع^2 - 2 س + 4 ع = 0$

هي معادلة ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع .

الثنائية (− 1 ، − 1) هي حل لهذه المعادلة

الثنائية (1 ، 0) ليست حلا لهذه المعادلة

2) في $ح \times ح$ المعادلة : س + 2ع − 3 = 0 هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع .

الثنائية (1 ، 1) هي حل لهذه المعادلة

الثنائية (− 1 ، 3) ليست حلا لهذه المعادلة .

3) لتكن ، في $ح \times ح$ ، المعادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع : 3 س − ع + 4 = 0 (1)

يمكن كتابة (1) على الشكل ع = 3 س + 4

مجموعة حلول المعادلة (1) هي المجموعة ح حيث :

ح = { (س ، ع) ∋ ح × ح : س ∋ ح وَ ع = 3 س + 4 }

3.1 ـ المعادلات المتكافئة :

- تكون المعادلتان تا (س ، ع) = 0 وَ ها (س ، ع) = 0 متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

  نكتب عندئذ : تا (س ، ع) = 0 ⟺ ها (س ، ع) = 0

- لتكن تا وَ ها دالتين عدديتين للمتغيرين الحقيقيين س ، ع معرفتين على نفس المجموعة وليكن ك عدداً حقيقياً **غير معدوم** .

  لدينا :

  تا (س ، ع) = 0 ⟺ تا (س ، ع) + ها (س ، ع) = ها (س ، ع)

  تا (س ، ع) = 0 ⟺ ك × تا (س ، ع) = 0

4.1 ـ جمل معادلتين :

لتكن تا (س ، ع) = 0 وَ ها (س ، ع) = 0 معادلتين للمجهولين س ، ع .

كل ثنائية ($س_0$ ، $ع_0$) **تحقق في آن واحد** المساواتين

تا ($س_0$ ، $ع_0$) = 0 وَ ها ($س_0$ ، $ع_0$) = 0 تدعى حلا للجملة

$$\begin{cases} تا (س ، ع) = 0 \\ ها (س ، ع) = 0 \end{cases}$$

حل هذه الجملة هو إيجاد مجموعة حلولها .

تكون جملتان متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

من الواضح أنه إذا كانت لدينا جملة معادلتين وبدلنا إحدى المعادلتين بمعادلة مكافئة لها نحصل على جملة مكافئة للجملة الأولى .

مثلا :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\text{س} - \text{ع} + 1 = 0 \\ \text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{س} + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{ع} = 2\text{س} + 1 \\ \text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{س} + 5 = 0 \end{array}\right.$$

زيادة على ذلك توجد قواعد تسمح بتبديل جملة مفروضة بجملة مكافئة لها .

وننص فيما يلي على قاعدتين من هذه القواعد وهما قاعدة التعويض (أو طريقة التعويض) وقاعدة الجمع (أو طريقة الجمع) .

2 ـ حل جملة معادلتين لمجهولين

1.2 ـ طريقة التعويض

قاعدة

في المجموعة ح × ح

إذا كان تا (س ، ع) = 0 $\Leftrightarrow$ ع = ل (س) فإن :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{تا (س ، ع) } = 0 \\ \text{ها (س ، ع) } = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{ع = ل (س)} \\ \text{ها (س ، ل (س)) } = 0 \end{array}\right.$$

مثال 1 :

حل ، في ح×ح ، الجملة التالية :

$$\begin{cases} \text{س} - \text{ع} - 3 = 0 \\ 2\,\text{س} + 5\,\text{ع} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{س} - \text{ع} - 3 = 0 \\ 2\,\text{س} + 5\,\text{ع} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \text{س} - 3 \\ 2\,\text{س} + 5\,\text{ع} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \text{س} - 3 \\ 2\,\text{س} + 5\,(\text{س} - 3) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \text{س} - 3 \\ 7\,\text{س} - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \text{س} - 3 \\ \text{س} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = 2 \\ \text{ع} = -1 \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي : $\{ (2 ، -1) \}$

مثال 2 :

حل ، في ح×ح ، الجملة :

$$\begin{cases} \text{س} + \text{ع}^2 - 5 = 0 \\ 3\,\text{س} + 2\,\text{ع} - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} س + ع^2 - 5 = 0 \\ 3\,س + 2\,ع - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} س = 5 - ع^2 \\ 3\,س + 2\,ع - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} س = 5 - ع^2 \\ 3\,(5 - ع^2) + 2\,ع - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} س = 5 - ع^2 \\ -3\,ع^2 + 2\,ع + 8 = 0 \end{cases}$$

المعادلة ($-3\,ع^2 + 2\,ع + 8 = 0$) هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول ع .

$$\Delta' = (1)^2 - (-3)(8) = 25$$

إذن تقبل هذه المعادلة حلّين هما

$$ع' = \frac{-1-5}{-3} = 2$$

$$ع'' = \frac{-1+5}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$-3\,ع^2 + 2\,ع + 8 = 0 \Leftrightarrow ع = 2 \text{ أو } ع = -\frac{4}{3}$$

وبالتالي :

$$\begin{cases} س = 5 - ع^2 \\ -3\,ع^2 + 2\,ع + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} س = 5 - ع^2 \\ ع = 2 \text{ أو } ع = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ع = 2 \text{ وَ } س = 5 - (2)^2 \\ \text{أو} \\ ع = -\dfrac{4}{3} \text{ وَ } س = 5 - \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} س = 1 \text{ وَ } ع = 2 \\ \text{أو} \\ س = \dfrac{29}{9} \text{ وَ } ع = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي :

$$\left\{ (1 ، 2) ، \left(\dfrac{29}{9} ، -\dfrac{4}{3} \right) \right\}$$

2.2 ـ طريقة الجمع :

قاعدة

إذا كان α وَ β عددين حقيقيين حيث $\alpha \neq 0$ فإن :

$$\begin{cases} تا (س ، ع) = 0 \\ ها (س ، ع) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \ تا (س ، ع) + \beta \ ها (س ، ع) = 0 \\ ها (س ، ع) = 0 \end{cases}$$

مثال 1 :

حل ، في ح×ح ، الجملة

$$(1)\quad \begin{cases} 3\text{س} + 5\text{ع} - 1 = 0 \\ 2\text{س} + 3\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,(3\text{س} + 5\text{ع} - 1) - 3\,(2\text{س} + 3\text{ع} + 7) = 0 \\ 2\text{س} + 3\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6\text{س} + 10\text{ع} - 2 - 6\text{س} - 9\text{ع} - 21 = 0 \\ 2\text{س} + 3\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = 23 \\ 2\text{س} + 3\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = 23 \\ \text{س} = -38 \end{cases}$$

إذن الجملة (1) تقبل حلاًّ واحداً هو الثنائية (-38 ، 23)

مثال 2 :

حل ، في ح×ح الجملة :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{س}^2 - \text{س}\text{ع} + \text{س} - 4 = 0 \\ \text{س}\text{ع} + \text{س} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{س}^2 - \text{س}\text{ع} + \text{س} - 4) + (\text{س}\text{ع} + \text{س} + 1) = 0 \\ \text{س}\text{ع} + \text{س} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} س^2 + 2س - 3 = 0 \\ س ع + س + 1 = 0 \end{cases}$$

المعادلة ($س^2 + 2س - 3 = 0$) هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلّين $س'$ ، $س''$: $س' = 1$ وَ $س'' = -3$

يكون عندئذ :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} س = 1 \text{ أو } س = -3 \\ س ع + س + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} س = 1 \text{ وَ } 1 ع + 1 + 1 = 0 \\ \text{أو} \\ س = -3 \text{ وَ } -3 ع - 3 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} س = 1 \text{ وَ } ع = -2 \\ \text{أو} \\ س = -3 \text{ وَ } ع = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

إذن مجموعة حلول الجملة (1) هي :

$$\left\{ (1 ، -2) ؛ \left(-3 ، -\frac{2}{3} \right) \right\}$$

3 ـ حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى لمجهولين

لتكن جملة المعادلتين من الدرجة الأولى للمجهولين الحقيقيين س ، ع :

$$\begin{cases} أ س + ب ع + حـ = 0 \\ أ' س + ب' ع + حـ' = 0 \end{cases}$$

لحل هذه الجملة يمكن استعمال احدى الطريقتين (التعويض أو الجمع) اللتين تم عرضهما في الفقرة السابقة ؛ ونقدم فيما يلي طريقة أخرى لدراسة هذه الجملة في حالة :

$(أ ، ب) \neq (0 ، 0)$ وَ $(أ' ، ب') \neq (0 ، 0)$

في المستوي المنسوب إلى معلم $(م ، \vec{و} ، \vec{ى})$

المعادلة أ س + ب ع + حـ = 0 حيث $(أ ، ب) \neq (0 ، 0)$

هي معادلة لمستقيم (Δ) والمعادلة أ' س + ب' ع + حـ' = 0

حيث $(أ' ، ب') \neq (0 ، 0)$ هي معادلة لمستقيم (Δ') .

الشعاع $\vec{ش}$ $\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

والشعاع $\vec{ش'}$ $\begin{pmatrix} -ب' \\ أ' \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ')

تكون الثنائية (س ، ع) حلا للجملة ،

$$\begin{cases} أ س + ب ع + حـ = 0 \\ أ' س + ب' ع + حـ' = 0 \end{cases}$$

اذا وفقط اذا كان (س ، ع) احداثيي نقطة مشتركة للمستقيمين (Δ) وَ (Δ') .

نعلم أن المستقيمين (Δ) وَ (Δ') يتوازيان إذا وفقط

إذا كان المحدد $\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix}$ معدوماً

ويتقاطعان ، إذاً ، إذا وفقط إذا كان هذا المحدد غير معدوم .

المناقشة :

1) إذا كان $\begin{vmatrix} ا & ب \\ ا' & ب' \end{vmatrix} \neq 0$ فإن المستقيمين (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة واحدة إحداثياها (س ، ع).

إن حساب س و ع باستعمال إحدى الطريقتين (التعويض أو الجمع)

يعطي :

$$س = \frac{\begin{vmatrix} ب & حـ \\ ب' & حـ' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ا & ب \\ ا' & ب' \end{vmatrix}} \quad و \quad ع = \frac{\begin{vmatrix} حـ & ا \\ حـ' & ا' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ا & ب \\ ا' & ب' \end{vmatrix}}.$$

2) إذا كان $\begin{vmatrix} ا & ب \\ ا' & ب' \end{vmatrix} = 0$ يكون المستقيمان (Δ) وَ (Δ') متوازيين :

يوجد عندئذ عدد حقيقي غير معدوم λ حيث :
$\overleftarrow{ش'} = \lambda \overleftarrow{ش}$ أي $ا' = \lambda ا$ وَ $ب' = \lambda ب$

• إذا كان $حـ' = \lambda حـ$ فإن المعادلتين $ا س + ب ع + حـ = 0$ وَ $ا' س + ب' ع + حـ' = 0$ هما معادلتان لنفس المستقيم .
وتكون عندئذ مجموعة حلول الجملة هي مجموعة حلول إحدى المعادلتين

• إذا كان $حـ' \neq \lambda حـ$ يكون المستقيمان المتوازيان (Δ) وَ (Δ') **متمايزين** تقاطعهما هو المجموعة الخالية والجملة ، عندئذ ، ليس لها حل .

الخلاصة :

لتكن ، في ح × ح ، جملة المعادلتين من الدرجة الأولى للمجهولين س ، ع :

$$(1) \begin{cases} ا\,س + ب\,ع + حـ = 0 \\ ا'\,س + ب'\,ع + حـ' = 0 \end{cases}$$

- إذا كان : $ا\,ب' - ب\,ا' \neq 0$ فان الجملة (1) تقبل حلا واحدا
- إذا كان $ا\,ب' - ب\,ا' = 0$ فإن الجملة (1) :

إما ليس لها حل . وإما لها عدد غير منته من الحلول .

مثال 1 :

لتكن ، في ح × ح ، الجملة

$$\begin{cases} س + 2\,ع - 10 = 0 \\ 3\,س + ع - 15 = 0 \end{cases}$$

لدينا : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$

بما أن محدد الجملة غير معدوم فهي ، إذاً ، تقبل حلاً واحداً .

حساب س ، ع :

$$س = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -15 \end{vmatrix}}{-5} = 4 \quad ؛ \quad ع = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 1 \\ -15 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = 3$$

الحل الوحيد للجملة هو الثنائية (4 ، 3)

مثال 2 :

لتكن ، في ح × ح ، الجملة

$$\begin{cases} 4\text{س} - 6\text{ع} = 2 \\ -2\text{س} + 3\text{ع} = -1 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases} 4\text{س} - 6\text{ع} = 2 \\ -2\text{س} + 3\text{ع} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\text{س} - 6\text{ع} - 2 = 0 \quad (1) \\ -2\text{س} + 3\text{ع} + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

لنحسب محدد الجملة السابقة :

لدينا : $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

فالجملة إذاً إما ليس لها حل وَ إما لها عدد غير منته من الحلول .

نلاحظ أن :

$(1) \Leftrightarrow -2(-2\text{س} + 3\text{ع} + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -2\text{س} + 3\text{ع} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2)$

إذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي مجموعة حلول المعادلة (2)

وهي :

$$(\text{ح}) = \left\{ (\text{س} ، \text{ع}) \in \text{ح} \times \text{ح} : \text{س} \in \text{ح} \text{ و ع} = \frac{2\text{س} - 1}{3} \right\}$$

مثال 3

لتكن ، في ح × ح ، الجملة

$$\begin{cases} -س + 2ع - 2 = 0 \\ 3س - 6ع + 1 = 0 \end{cases}$$

لنحسب محدد هذه الجملة

لدينا : $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$

فالجملة ، إذاً ، إما ليس لها حل وإما لها عدد غير منته من الحلول

$$\begin{cases} -س + 2ع - 2 = 0 \\ 3س - 6ع + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3س - 6ع + 6 = 0 \\ 3س - 6ع + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} 3س - 6ع = -6 \\ 3س - 6ع = -1 \end{cases}$$

من الواضح أنه لا يمكن أن يكون (3 س − 6 ع) مساوياً في آن واحد (− 1) و (− 6)

إذن الجملة المعطاة ليس لها حل .

4 ـ حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات مجهولين

1.4 ـ المتراجحات من الدرجة الأولى ذات المجهولين

• نسمي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع كل متراجحة من الشكل **تا (س ، ع) > 0**

(أو تا (س ، ع) ⩽ 0 أو تا (س ، ع) < 0 أو تا (س ، ع) ⩾ 0)

حيث تا (س ، ع) هو كثير حدود من الدرجة الأولى للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

- نسمي حلا للمتراجحة **تا (س ، ع) > 0** كل ثنائية ($س_0$ ، $ع_0$) من ح × ح تحقق المتباينة تا ($س_0$ ، $ع_0$) > 0 .

- حل المتراجحة تا (س ، ع) > 0 هو تعيين مجموعة حلولها .

مثال :

في ح × ح ، المتراجحة 3 س + ع − 4 > 0

هي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع .

الثنائية (0 ، 1) هي حل لهذه المتراجحة .

الثنائية (2 ؛ 1) ليست حلا لهذه المتراجحة .

يمكن كتابة المتراجحة (3 س + ع − 4 > 0) على الشكل :

ع > 4 − 3 س

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجموعة حـ حيث

$$حـ = \{ (س ، ع) \in ح \times ح : س \in ح \text{ وَ } ع > 4 - 3 س \}$$

2.4 ـ إشارة (أ س + ب ع + حـ)

المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) .

أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية حيث (أ ، ب) ≠ (0 ، 0) .

لتكن الدالة تا للمستوي في ح التي ترفق بكل نقطة ن (س ، ع) العدد الحقيقي تا (ن) = أ س + ب ع + حـ

- لندرس إشارة تا (ن) حسب وضعية النقطة ن في المستوي .

مجموعة النقط ن حيث تا (ن) = 0 هي المستقيم (Δ) الذي معادلته : أ س + ب ع + حـ = 0

الشعاع $\overleftarrow{ش}$ $\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

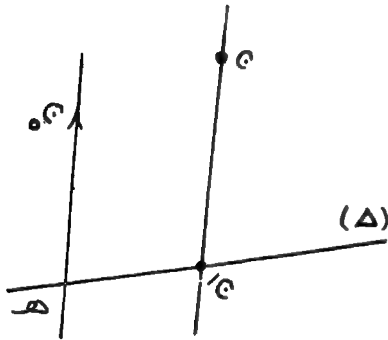
لتكن هـ نقطة من المستقيم (Δ) و

$م_0$ نقطة من المستوي لا تنتمي إلى

(Δ) . (الشكل 1)

ولتكن $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ مركبتي $\overleftarrow{هـ م_0}$.

لدينا : $\begin{vmatrix} \alpha & -ب \\ \beta & أ \end{vmatrix} \neq 0$



(الشكل 1)

أي α أ + β ب $\neq 0$ لأن $\overleftarrow{هـ م_0}$ لا يوازي $\overleftarrow{ش}$

من أجل كل نقطة م من المستوي ، المستقيم الذي يشمل م ويوازي $\overleftarrow{هـ م_0}$ يقطع (Δ) في نقطة م' (س' ، ع') .

من تا (م') = أ س' + ب ع' + حـ = 0

و $\overleftarrow{م' م} = \lambda \overleftarrow{هـ م_0}$ نستنتج :

$\begin{cases} س - س' = \lambda\,\alpha \\ ع - ع' = \lambda\,\beta \end{cases}$ أي $\begin{cases} س = س' + \lambda\,\alpha \\ ع = ع' + \lambda\,\beta \end{cases}$

إذن :

تا (م) = أ (س' + $\lambda\,\alpha$) + ب (ع' + $\lambda\,\beta$) + حـ

= λ (α أ + β ب) + (أ س' + ب ع' + حـ)

= λ (α أ + β ب)

بما أن (α أ + β ب) عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإن إشارة λ هي التي تحدد إشارة تا (م) .

إذا كان Π_1 نصف المستوي المفتوح الذي يشمل ن$_0$ والمحدد بالمستقيم (Δ)
و Π_2 نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ) ،
فإن العلاقة $\overrightarrow{ن ن} = \lambda \overrightarrow{هـ ن_0}$ تبيّن ما يلي :

- $\lambda = 0 \Leftrightarrow$ ن $\in$ (Δ)
- $\lambda > 0 \Leftrightarrow$ ن $\in \Pi_1$
- $\lambda < 0 \Leftrightarrow$ ن $\in \Pi_2$

ومنه النتيجة التالية :

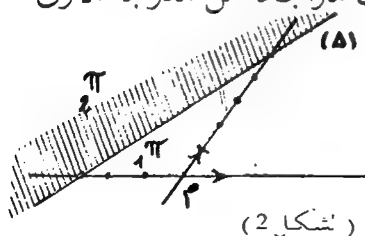
لا تتغير إشارة العدد تا (ن) لما تتغير النقطة ن في أحد نصفي المستوي المفتوحين المحددين بالمستقيم (Δ)

مثال : إشارة (2 س + 3 ع + 1)
من أجل المبدأ م للمعلم الذي احداثياه (0 ، 0) لدينا
تا (م) = + 1 إذن تا (م) > 0
وبالتالي يكون (2 س + 3 ع + 1) موجباً تماما من أجل كل نقطة تنتمي إلى نصف المستوي المفتوح الذي يشمل م والمحدد بالمستقيم (Δ) الذي معادلته 2 س + 3 ع + 1 = 0 .
ويكون (2 س + 3 ع + 1) سالباً تماما من أجل كل نقطة تنتمي إلى نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ)

3.4 ـ الحل البياني لمتراجحات من الدرجة الأولى ذات مجهولين

حسب ما سبق فإن التمثيل البياني لمجموعة حلول متراجحة من الدرجة الأولى ذات مجهولين هو نصف مستوٍ .

مثال :
التمثيل البياني لمجموعة حلول



(شكل 2)

المتراجحة : 2 س − ع + $5 > 0$

ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته : 2 س − ع + $5 = 0$
وليكن Π_1 نصف المستوي المفتوح الذي يشمل المبدأ م والمحدد بالمستقيم (Δ) و Π_2 نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ) (الشكل 2) .
لنضع تا (ن) = 2 س − ع + 5
لدينا : تا (م) = $2.0 - 0 + 5 = +5$ إذن تا (م) > 0
تمثل مجموعة حلول المتراجحة المقترحة بنصف المستوي Π_1 غير المشطوب في الشكل 2

4.4 ـ الحل البياني لجملة متراجحات من الدرجة الأولى لمجهولين

لتكن الجملة :

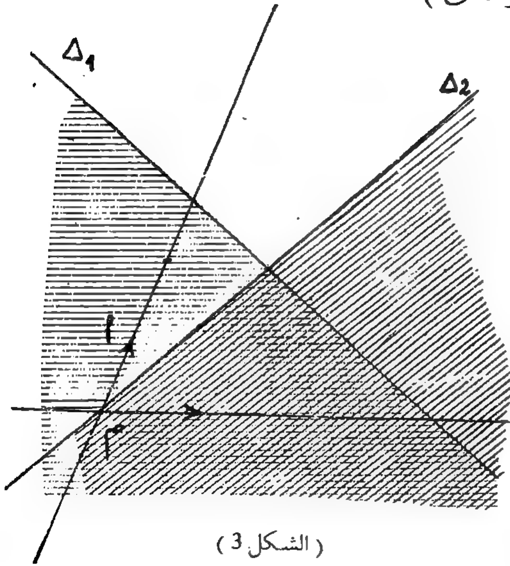
$$\begin{cases} a\,س + b\,ع + c \geqslant 0 & (1) \\ a'\,س + b'\,ع + c' > 0 & (2) \end{cases}$$

مجموعة حلول الجملة هي مجموعة الثنائيات (س ، ع) التي تحقق ، في آن واحد ، (1) وَ (2) .
نعلم أن :
مجموعة حلول المتراجحة (1) ممثّلة بنصف مستو مغلق $ح_1$ وَ مجموعة حلول المتراجحة (2) ممثّلة بنصف مستوٍ مفتوح $ح_2$.
وبالتالي :
تكون مجموعة حلول الجملة المقترحة ممثّلة بالمجموعة $ح_1 \cap ح_2$.

مثال :
الحل البياني للجملة

$$\begin{cases} س + ع - 3 \leqslant 0 & (1) \\ 2\,س - ع > 0 & (2) \end{cases}$$

المستوي منسوب إلى المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$



(الشكل 3)

• مجموعة حلول المتراجحة (1) ممثلة بنصف مستو مغلق حدّه المستقيم (Δ_1) الذي معادلته
س + ع − 3 = 0
(الشكل 3)
الثنائية (0 ، 0) ليست حلا للمتراجحة (1) .
لنشطب إذاً نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم (Δ_1) الذي يشمل المبدأ م
هذا نصف المستوي المشطوب يمثل مجموعة الثنائيات التي ليست حلولا للمتراجحة (1) .

• مجموعة حلول المتراجحة (2) ممثلة بنصف مستوٍ مفتوح حدّه المستقيم (Δ_2) الذي معادلته 2 س − ع = 0 .
الثنائية (0 ، 1) حل للمتراجحة (2) .
لنشطب إذاً نصف المستوي المغلق المحدد بالمستقيم (Δ_2) والذي لا يشمل النقطة أ (0 ، 1) .
هذا نصف المستوي المشطوب يمثل مجموعة الثنائيات التي ليست حلولا للمتراجحة (2) .

• مجموعة حلول الجملة ممثلة بتقاطع نصفي المستوي اللذين يمثلان حلول المتراجحتين على الترتيب وهو الجزء غير المشطوب في الشكل .

تمــارين

كثيرات الحدود :

1. أنجز العمليات التالية على وحيدات الحد للمتغير س
ثم عيّن ، في كل حالة ، درجة وحيد الحد الناتج :

• $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}\,\text{ا ب س}^2\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{ا س}\right)^2\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{ا ب}^2\right)$

• $-7\,\text{س}^2+\frac{1}{3}\,\text{س}^2-\frac{2}{5}\,\text{س}^2$ • $5\sqrt{2}\,\text{س}^2+3\sqrt{8}\,\text{س}^2-\sqrt{50}\,\text{س}^2$

2. 1) بسط ورتب كثيرات الحدود تا (س) ، ها (س) ، عا (س) التالية

$\text{تا (س)} = -\frac{1}{2}\,\text{س}^4+2\,\text{س}^3+1+\text{س}^3-2\,\text{س}^2$

$\text{ها (س)} = \text{س}-1+\text{س}^2-\text{س}+5-(2\,\text{س}^2-5\,\text{س})$

$\text{عا (س)} = \text{س}\sqrt{3}+\text{س}-5-(\text{س}^2-\text{س}\sqrt{2}+1)$

2) احسب ورتب المجاميع التالية :

- تا (س) + ها (س) + عا (س)
- تا (س) − ها (س) + عا (س)
- − تا (س) + ها (س) − عا (س)

3. تا (س) ، ها (س) ، عا (س) كثيرات حدود حيث :

$\text{تا (س)} = -\text{س}^3+3\,\text{س}^2-7\,\text{س}+5$

$\text{ها (س)} = 2\,\text{س}^3-3\,\text{س}^2+2\,\text{س}-1$

$\text{عا (س)} = -3\,\text{س}^3+5\,\text{س}-2$

أُحسب ورتب كثيرات الحدود التالية :

ك (س) = 2 تا (س) + 2 ها (س) − عا (س)

ل (س) = 2 ها (س) + 2 عا (س) − تا (س)

ط (س) = 2 عا (س) + 2 تا (س) − ها (س)

م (س) = تا (س) + ها (س) + عا (س)

ه (س) = ك (س) + ل (س) + ط (س)

4. $\text{تا}(\text{س})$ ، $\text{ها}(\text{س})$ ، $\text{عا}(\text{س})$ كثيرات حدود حيث :

$$\text{تا}(\text{س}) = -2\text{س}^3 + \text{س}^2 - 5$$

$$\text{ها}(\text{س}) = \frac{1}{2}\text{س}^3 + \sqrt{2}\,\text{س}^2 + 3\text{س} - 1$$

$$\text{عا}(\text{س}) = -\sqrt{3}\,\text{س}^3 + \frac{5}{2}\text{س}$$

أُحسب $\text{تا}(-1)$ ؛ $\text{ها}(-2\sqrt{2})$ ؛ $\text{عا}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

5. أُحسب الجداءات التالية :

$(\text{س}^4 + 8\text{س}^2 - 7)(-2\text{س}^2 + \text{س} - 1)$

$(\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + \text{س} - 1)(\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + \text{س} + 1)$

$(\text{س}^2 + \text{س} + 1)(\text{س}^2 - \text{س} + 1)(\text{س}^2 - 1)$

6. حلل كلا من كثيرات الحدود التالية :

1) $(7\text{س} - 1)^2 - (7\text{س} - 1)(3\text{س} + 2)$

2) $(4 - 3\text{س})(2 + 3\text{س}) - 2(1 - 2\text{س})(3\text{س} - 4)$

3) $2(4\text{س}^2 + 2\text{س}) + 3(2\text{س} + 1)$

4) $\text{س}^2 - 9 - (4\text{س} + 5)(\text{س} - 3)$

5) $4(4 - \text{س}^2) - (\text{س} - 2)^2$

6) $(5\text{س} - 10)(\text{س} - 3) - 3(\text{س}^2 - 4)$

7) $(\text{س}^2 - 16)^2 - (\text{س} + 4)^2$

8) $12\text{س}^3 - 16\text{س}^2 - (3\text{س} - 4)$

9) $2\text{س}^2 - 18 - (\text{س} + 3)^2 + 8\text{س} + 24$

10) $9\text{س}^2 - 12\text{س} + 4 + (6\text{س} - 4)(\text{س} + 4) - 18\text{س}^2 + 8$

11) $\text{ع}^2 - (\text{س} - 1)^2 - 2(\text{س} - 1)(\text{ع} + \text{س} - 1)$

12) $\text{س}^2 + \text{ع}^2 + 2\text{ع}\,\text{س} - 9\text{أ}^2 + 6\text{أ}\text{ب} - \text{ب}^2$

13) $(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^2 - \text{ح}^2) - (\text{أ} - \text{ح})(\text{أ}^2 - \text{ب}^2)$

14) $\text{أ}^2\text{س}\,\text{ع} + \text{أ}\text{ب}\,\text{ع}^2 + \text{ب}^2\text{س}\,\text{ع} + \text{أ}\text{ب}\,\text{س}^2$

15) ا^{4} + ا^{3} − ا^{2} − ا

16) (س^{2} − 4) + (س^{3} − 8)

17) (2 س − 1)^{3} − 8 س^{3} + 1

18) 2 س^{6} − 6 س^{4} + 6 س^{2} − 2

7. تا (س) و ها (س) كثيرا حدود حيث :

تا (س) = س^{4} − 6 س^{3} + 13 س^{2} − 12 س + 4

ها (س) = س^{4} + س^{2} + 1

عيّن الأعداد الحقيقية ا′ ، ب′ ، ا ، ب بحيث يكون :

∀ س ∈ ح : (س^{2} + ا′ س + ب′)^{2} = تا (س)

∀ س ∈ ح : (س^{2} + س + 1) (س^{2} + ا س + ب) = ها (س) .

8. تا (س) كثير حدود حيث :

تا (س) = س^{5} − 4 س^{3} + 5 س + 10

عيّن كثير الحدود ها (س) بحيث يكون :

∀ س ∈ ح : تا (س) = (س + 2) ها (س)

9. تا (س) و ها (س) كثيرا حدود حيث :

تا (س) = س^{3} − 13 س^{2} + 5 س + 34

ها (س) = س^{4} − س^{2} + 2 س − 1

هل توجد أعداد حقيقية ا′ ، ب′ ، ا ، ب ، ح بحيث يكون :

∀ س ∈ ح : (س − 2) (س^{2} + ا′ س + ب′) = تا (س)

∀ س ∈ ح : (س^{2} + س − 1) (ا س^{2} + ب س + ح) = ها (س)

10. تا (س) كثير حدود حيث :

تا (س) = س^{4} − س^{3} + 2 س^{2} − 2

أُحسب تا (1) واستنتج تحليلاً لكثير الحدود تا (س) .

11. تا (س) كثير حدود حيث :

تا (س) = س^{3} − 5 س^{2} + 18

أوجد كثير حدود ها (س) بحيث يكون :

∀ س ∈ ح تا (س) = (س − 3) ها (س) .

12. تا (س) كسر ناطق حيث $تا(س) = \dfrac{2\text{س}^2 - \text{س} - 1}{2\text{س} - 3}$

1) عيّن مجموعة التعريف ف للدالة الناطقة تا

2) عيّن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ بحيث يكون :

$$\forall \text{س} \in \text{ف} : \text{تا}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب} + \frac{\text{حـ}}{2\text{س} - 3}.$$

1. نفس التمرين السابق من أجل $تا(س) = \dfrac{-2\text{س}^2 + 5\text{س}}{2\text{س} - 3}$

14. عيّن مجموعة التعريف لكل كسر من الكسور الناطقة التالية . ثم اختزل كلا منها :

1) $\dfrac{8\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}{2\text{س}^2 + 3\text{س}}$

2) $\dfrac{\text{س}^3 + 4\text{س}^2 + 4\text{س}}{\text{س}^2 + 8}$

3) $\dfrac{\text{س}^3 + \text{س}^2 - 10\text{س} + 8}{(\text{س} - 2)(\text{س}^2 - 1)}$

4) $\dfrac{2\text{س}}{\text{س}^2 - 1} + \dfrac{3 - \text{س}}{\text{س} - 1} - \dfrac{6}{\text{س} + 1}$

5) $\dfrac{3\text{س}^3 + \text{س}^2}{\text{س}^3 - 2\text{س}^2} - \dfrac{6\text{س}^2 - 54}{\text{س}^3 - 9\text{س}} - \dfrac{\text{س} + 12}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$

6) $\dfrac{7\text{س} + 6}{\text{س} + 2} + \dfrac{18 - 2\text{س}^2}{\text{س}^2 - 3\text{س}} + \dfrac{-2\text{س}^2 + 8\text{س} - 8}{\text{س}^2 - 4}$

7) $$1 + \frac{1 + \dfrac{1 + \text{س}}{1 - 3\text{س}}}{1 - 3\,\dfrac{1 + \text{س}}{1 - 3\text{س}}}$$

15. هل المعادلتان التاليتان ، في ح . متكافئتان ؟

$$س + \frac{3}{س - 1} = س^2 ،$$

$$\frac{3}{س - 1} = س^2 - س$$

16. نفس التمرين من أجل :

$$س^3 - 3س^2 + 2س = س(س - 1)$$

$$س^2 - 3س + 2 = س - 1$$

17. نفس التمرين من أجل :

$$س + \frac{س^3}{5} = س^2 - 1$$

$$5س + س^3 = 5(س^2 - 1)$$

18. نفس التمرين من أجل :

$$س^2 - 3س = س$$

$$س^2 - 3س + \frac{1}{س} = س + \frac{1}{س}$$

19. نفس التمرين من أجل :

$$\sqrt{س + 1} = 1 - س$$

$$س + 1 = (1 - س)^2$$

20. هل المتراجحتان التاليتان في ح متكافئتان ؟

$$4س^2 - 2س < -2س^3 + 4س$$

$$-2س^2 + س < س^3 - 2س$$

21. نفس التمرين من أجل :

$$4س^2 - 2س \leq -2س^3 + 4س$$

$$2س - 1 \leq -س^2 + 2$$

22. نفس التمرين من أجل :

$3\text{س} + 1 \leqslant \sqrt{\text{س} - 4}$ ؛ $(3\text{س} + 1)^2 \leqslant \text{س} - 4$

23. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $\dfrac{3(3\text{س} - 1)}{7} + \dfrac{\text{س}}{2} = \dfrac{5(3 - 2\text{س})}{4}$

2) $\dfrac{\text{س} + 1}{4} - \dfrac{2\text{س} - 1}{5} + \dfrac{3\text{س} + 1}{2} = \dfrac{27\text{س} + 19}{20}$

3) $\dfrac{2\text{س}}{3} - \dfrac{3\text{س} - 1}{5} = \dfrac{2(\text{س} - 3)}{3} - \dfrac{3(\text{س} + 1)}{5}$

4) $\dfrac{9\text{س} + 7}{2} - \left(\text{س} - \dfrac{\text{س} - 2}{7}\right) = 36$

5) $\text{س}(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2} = \text{س} - 2$

6) $0,2\text{س} - 3,8(\text{س} + 1) = 1,4(0,5\text{س} - 3) + 2,3$

24. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $2\text{س} + 3(\text{س} - 2) + 9 = 0$

2) $\text{س}(\text{س} + 3) + 5 = \text{س}^2 - 1$

3) $5\text{س}^2 = 3\text{س}$

4) $3(\text{س} - 2) = \text{س}^2 - 4$

5) $(\text{س} - 1)^2 + (\text{س}^2 - 1) = 0$

6) $\text{س}^4 + 2\text{س}^3 + \text{س}^2 = 0$

25. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س :

1) $\dfrac{2\text{س} + 1}{\text{س} + 3} = \dfrac{4\text{س} + 3}{2\text{س} + 5}$

2) $\dfrac{\text{س}^2}{\text{س} + 1} - 2\text{س} = \dfrac{1}{\text{س} + 1} - 1$

3) $\frac{2}{س - 1} + \frac{1}{1 - س^2} = \frac{3}{س + 1}$

4) $\frac{س + 1}{2(س + 2)} + \frac{1}{س + 1} = \frac{1}{(س + 1)(س + 2)}$

26. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $2س + 4 \geqslant 5س - 2$

2) $4س - 5 < 2(س + 3)$

3) $س - 12 \leqslant 4س$

4) $س - 7 + 3س > 2(س + 1)$

5) $5س > 3(س - 1)$

6) $2س + 3 \geqslant 4س - 9$

7) $\frac{4س}{5} - \frac{س}{10} > \frac{س}{2} + 3$

8) $\frac{س + 2}{2} - 1 < \frac{2س + 1}{3} - 2$

27. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $(س - 2)(س + 3) < 0$

2) $س^2 - 5س \geqslant 0$

3) $س^2 > 4$

4) $س(س^2 - 9) > 0$

5) $\frac{3س - 3}{س + 1} > 0$

6) $\frac{س + 2}{س} < 3$

7) $\frac{س + 2}{2س - 3} \leqslant 0$

8) $\frac{3س - 1}{س + 3} > 2$

9) $5س + 2|س - 1| \geqslant 4$

10) $|س| + \frac{3}{4} < س + 5$

28. حل ، في ح ، جمل المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $\begin{cases} 2س + 3 > س \\ س - 5 > 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} س + 3 < 2 \\ س < 4س - 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3\text{س} - 1 \geqslant 0 \\ 2\text{س} < 3\text{س} - 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2\text{س} + 1 > 3 \\ \text{س} < 5 \\ 3 < 7 - 2\text{س} \end{cases}$

29. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س والوسيط الحقيقي ط

1) $\text{ط}\,\text{س} = \text{ط} + 1$

2) $\text{ط}\,\text{س} - 1 = \text{س} + \sqrt{2}$

3) $2\,\text{ط}\,\text{س} + 3 = 6\,\text{ط} + \text{س}$

4) $(\text{ط} - 2)\,\text{س} = \text{ط}^2 - 4$

5) $\text{ط}^2\,\text{س} - \text{ط}^2 - \text{ط} = \text{س}$

6) $\frac{1}{\text{ط}} - \text{س} = \frac{\text{س}}{\text{ط}} + \text{ط}$

7) $\frac{1}{\text{س}} - \frac{2}{\text{ط}} = 1$

8) $\frac{\text{ط}}{\text{س} - 1} = \frac{\text{س} + \text{ط}^2}{\text{س}^2 - 1}$

9) $\frac{\text{س}}{\text{ط} - \text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{ط} + \text{س}} = \frac{\text{ط}^2}{\text{ط}^2 - \text{س}^2}$

30. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س والوسيط الحقيقي ط

1) $\text{ط}\,\text{س} < \text{س} + 2$

2) $\text{ط}^2\,\text{س} + 2 < 3$

3) $2\,\text{ط}\,\text{س} + 3 < \text{س} + 6\,\text{ط}$

4) $2\text{س} + 3\,\text{ط} \geqslant \text{ط}\,\text{س} + 6$

5) $\frac{\text{س} + 1}{\text{ط}} - \frac{3\text{س} - 1}{3} \leqslant 1$

6) $\frac{2\text{س}}{(\text{ط} + 1)^2} \leqslant \frac{\text{س} + 1}{1 + \text{ط}}$

7) $\frac{2\text{س}}{\text{ط}} - 3\text{س} \leqslant \frac{\text{س} + 1}{2\,\text{ط}} + \frac{1}{2}$

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية :

31. حل ، في ح ، كلا من المعادلات التالية ذات المجهول س :

1) $9\text{س}^2 = 7$

2) $\frac{\text{س}^2}{25} = 9$

3) $(\text{س} + \sqrt{2})^2 = 4$

4) $(3\text{س} - 4)^2 = 16$

5) $(\text{س} + 2)^2 = 7$

6) $(-\text{س} + \sqrt{2})^2 = 3$

7) $8\text{س}^2 - 2 = 0$

8) $4\text{س}^2 - 5 = \text{س}^2 + 70$

9) $(\text{س} - 3)(\text{س} + 3) = 16$

10) $5\text{س}^2 - 3\text{س} = 0$

11) $2\text{س}^2 = 4\text{س}$

12) $(2\text{س} + 3)(3\text{س} - 2) + 6 = 0$

13) $(\text{س} - 3)(\text{س} + 3) = 3\text{س} - 9$

32. اكتب كلاً من كثيرات الحدود التالية على شكلها النموذجي . ثم عيّن مجموعة جذور كل من هذه كثيرات الحدود

1) $9\text{س}^2 - 24\text{س} + 1$

2) $\text{س}^2 - 6\text{س} + 1$

3) $12\text{س}^2 + 4\sqrt{6}\,\text{س} + 2$

4) $-5\text{س}^2 + 9\text{س} - 5$

5) $3\text{س}^2 + \text{س} - 4$

6) $-5\text{س}^2 + 10\sqrt{2}\,\text{س} - 10$

7) $3\text{س}^2 + \text{س} + \sqrt{2}\,\text{س} + 5$

8) $2\text{س}^2 - 3\text{س} - 20$

33. حل ، في ح ، باستعمال القوانين ، كلا من المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $\frac{\text{س}^2}{2} - 3\text{س} + \frac{5}{2} = 0$

2) $\frac{\text{س}}{5} + 9 + \left(-\frac{\text{س}}{2} + 3\right)^2 = 0$

3) $-\text{س}^2 = -4\text{س}^2 + 4\text{س} - 1$

4) $\text{س}^2 + 4\text{س} = 21$

5) $3\text{س} + \text{س}^2 + 5 = 0$

6) $4\text{س}^2 + 12\text{س} = -9$

7) $5\text{س}^2 - 7\text{س} - 34 = 0$

8) $\text{س}^2 + \text{س}\sqrt{2} = 4$

9) $\text{س}^2 + 2\text{س}\sqrt{2} + 1 = 0$

10) $4\text{س}^2 - 4\text{س}\sqrt{5} + 5 = 0$

11) $\text{س}^2 - 2(1 + \sqrt{2})\text{س} = 6 - 2\sqrt{2}$

12) $\sqrt{2}\,\text{س}^2 + (1 + \sqrt{2})\text{س} + 1 = 0$

34. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

1) $(2\text{س} + 3)(3\text{س} - 5) + 14 = 0$

2) $(4\text{س} + 3)^2 + (\text{س} - 1)^2 = 0$

3) $(2\text{س} - 1)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\text{س}\right)^2 = 0$

4) $(2\text{س} - 1)^3 = 8\text{س}^3 - 2$

5) $(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 3) = \text{س}^3 - \text{س}$

6) $14\text{س}^2 - (2\text{س} - 11)(5\text{س} + 4) = 33\text{س} + 22$

35. عيّن مجموعة تعريف كل كسر من الكسور الناطقة التالية . ثم اختزل كلا منها :

1) $\dfrac{6\text{س}^2 + 5\text{س} - 6}{4\text{س}^2 - 9}$

2) $\dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س}}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}$

3) $\dfrac{\text{س}^2 - \text{س} - 2}{2\text{س}^2 + 5\text{س} + 2}$

4) $\dfrac{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 5}{4\text{س}^2 - 20\text{س} + 25}$

5) $\dfrac{2\text{س}^2 + 4\text{س} - 6}{-\text{س}^2 - \text{س} + 6}$

6) $\dfrac{\text{س}^3 - 8}{3\text{س}^2 - 5\text{س} - 2}$

7) $\dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 1}{\text{س}^2 - 2\text{س}\sqrt{2} + 1}$

8) $\dfrac{2\text{س}^2 + \text{س}\sqrt{2} - 2}{\text{س}^2 - 2}$

36. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

1) $(\text{س} + 1)(2\text{س} + 3) = (\text{س} + 1)(\text{س}^2 - 5)$

2) $2\text{س}^4 + \text{س}^3 - \text{س} - 2 = 0$

3) $(7\text{س} - 1)^2 - (4\text{س} - 3)^2 = 5(3\text{س} + 2)^2$

4) $(\text{س} + 1)^3 + (\text{س} + 2)^3 = (\text{س} - 2)^3 + (\text{س} - 1)^3$

5) $(\text{س}^2 - 7\text{س} - 4)^2 = (\text{س}^2 - 9\text{س} + 4)^2$

6) $\text{س}^3 - 1 + (\text{س} - 1)(\text{س} + 2) = 0$

7) $\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 4\text{س} - 1 = \text{س} - \text{س}^2$

37. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $\dfrac{2\text{س}^2 + 5\text{س} - 3}{3\text{س}^2 + \text{س} - 2} = 0$

2) $\dfrac{2\text{س}^2 + \text{س} - 15}{\text{س}^2 + 5} = 0$

3) $\dfrac{2\text{س}^2 - \text{س}\sqrt{2} - 2}{\text{س}^2 + (\sqrt{2} - 1)\text{س} - \sqrt{2}} = 0$

4) $\dfrac{-\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 2\text{س} + 4}{\text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س} - 1} = 0$

5) $\dfrac{\text{س} - 2}{2\text{س} + 1} = \dfrac{3\text{س} - 1}{\text{س} - 3}$

6) $\dfrac{1}{\text{س} - 1} + \dfrac{1}{\text{س} - 2} = 8$

7) $\dfrac{3}{2(\text{س}^2 - 1)} - \dfrac{1}{4(\text{س} + 1)} = \dfrac{1}{8}$

8) $\dfrac{3}{\text{س}^2 + \text{س} - 2} + \dfrac{1}{\text{س} + 2} = \dfrac{1}{\text{س} - 1}$

9) $\dfrac{1}{\text{س} - 2} + \dfrac{7\text{س} + 8}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4} = \dfrac{12}{\text{س}^3 - 8}$

10) $\left(\dfrac{2\text{س} - 1}{\text{س} - 2}\right)^2 - \dfrac{4\text{س} - 1}{\text{س} - 2} = 1$

38. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

1) $س^2 + |س| - 1 = 0$ 2) $س^2 + |س - 3| = 0$

3) $|س| + |س^2 - 1| = 0$ 4) $|س - 5| + |س^2 - 25| = 0$

5) $|س - 5| - |س^2 - 25| = 0$

39. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $\sqrt{س^2 + 1} = س - 3$ 2) $\sqrt{س^2 - 1} = س + 2$

3) $\sqrt{س^2 - 4} = \frac{س}{2} - 1$ 4) $\sqrt{س^2 - 4 س + 4} = س$

5) $\sqrt{س^2 - 4 س + 4} = |س|$

40. ادرس إشارة كل من كثيرات الحدود التالية :

1) $- 3 س^2 - 6$ 2) $- س^2 + 7 س$

3) $(س - 2)^2 + 5$ 4) $2 س^2 + 6 س - 1$

5) $4 س^2 - 4 س + 3$ 6) $2 س^2 + س - 1$

7) $- س^2 + 2 س + 15$ 8) $3 س^2 - 10 س + 3$

9) $- س^2 + 2 س - 15$

41. ادرس إشارة كل من الجداءآت التالية :

1) $س (س^2 + س - 2)$

2) $(2 - س) (س^2 - 5 س + 6)$

3) $(2 - 3 س) (س^2 - س - 2) (س^2 - س + 1)$

4) $(س - 2) (س^2 - 2 س + 1) (2 س - س^2 - 5)$

42. ادرس إشارة كل من الكسور الناطقة التالية :

1) $\frac{س - 1}{س^2 - 2 س - 3}$ 2) $\frac{س^2 + 2 س - 3}{س^2 - س - 2}$

3) $\frac{س - 2}{س + 1} + س - 2$

43. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

1) $-\text{س}^2+\text{س}>0$

2) $\text{س}^2>4$

3) $\text{س}^2<\text{س}$

4) $\text{س}^2-6\text{س}+1\geqslant 0$

5) $\text{س}^2-2\text{س}+7<0$

6) $(2\text{س}-3)^2<(\text{س}-1)^2$

7) $(\text{س}+1)^2+4(\text{س}^2-1)<0$

8) $5\text{س}+2-4\text{س}^2\leqslant 0$

9) $(\text{س}-6)^2<(\text{س}-10)(\text{س}-2)$

10) $\dfrac{(\text{س}-1)^2}{2}-3(\text{س}-1)>0$

11) $2\text{س}^2+\dfrac{1}{5}\text{س}\leqslant\dfrac{2}{5}$

44. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $(\text{س}-1)(\text{س}^2+2)(\text{س}^2-9)>0$

2) $(2-\text{س}-\text{س}^2)(\text{س}^2+2\text{س}+1)\leqslant 0$

3) $\text{س}(\text{س}+1)^2(\text{س}^2-\text{س}-6)\leqslant 0$

4) $(\text{س}^2-4)^2(\text{س}^2-5\text{س}+6)>0$

5) $(\text{س}^2-5\text{س}+6)(\text{س}^2+3\text{س}+2)<0$

45. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $\dfrac{\text{س}}{\text{س}+4}>0$

2) $\dfrac{2\text{س}+1}{\text{س}-3}\leqslant 0$

3) $\dfrac{2\text{س}+3}{\text{س}-1}>4$

4) $\text{س}>\dfrac{3}{\text{س}-2}$

5) $\dfrac{\text{س}-1}{2\text{س}}<\dfrac{1}{\text{س}+2}$

6) $\dfrac{2\text{س}^2-2\text{س}}{\text{س}+1}<0$

7) $\dfrac{5\text{س}-\text{س}^2}{(4\text{س}-1)^2-49}>0$

8) $\dfrac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\leqslant\dfrac{\text{س}+1}{\text{س}-1}$

9) $\dfrac{5\text{س}}{3\text{س}+1}>\dfrac{5}{3}$

10) $\dfrac{\text{س}^2-3\text{س}+1}{\text{س}^2-4}>1$

46. حل ، في ح ، كلا من الجمل التالية :

1) $4 < \text{س}^2 + 3\text{س} + 5 < 12$ 2) $-4 < \frac{1}{\text{س} - 1} < 2$

3) $\frac{\text{س} + 2}{\text{س}} < 3 < \frac{\text{س}}{\text{س} - 1}$ 4) $-2 \leqslant \text{س} + \frac{1}{\text{س}} < 2$

5) $\begin{cases} 5\text{س} + 4 < 0 \\ 3\text{س}^2 - 7\text{س} + 9 > 0 \\ \text{س}^2 - 15 > 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 1} - \frac{1}{\text{س}} \leqslant 0 \\ \frac{\text{س}^2 - 1}{3\text{س} - 4} > \frac{\text{س} + 1}{\text{س}} \end{cases}$

47. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

1) $|\text{س} - 3| < 1$ 2) $|\text{س} - 5| > 5$

3) $|\text{س} + 3| > |3\text{س} - 2|$

4) $(\text{س} - 1)(2\text{س} + 1) > |\text{س} - 1|$

5) $\frac{|\text{س}| - 1}{|\text{س}| + 2} < 1$

48. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

1) $\sqrt{\text{س}} < 2$ 2) $\sqrt{\text{س}^2} < 4$

3) $\sqrt{\text{س}^2 - 4} \leqslant 0$ 4) $\sqrt{\text{س}^2 + 1} \leqslant 1$

49. ط عدد حقيقي و $\text{تا}_{\text{ط}}$ (س) كثير حدود حيث :

$\text{تا}_{\text{ط}}(\text{س}) = (\text{ط}^2 - 4)\text{س}^2 - (\text{ط} + 2)\text{س} + 1 - \text{ط}^2$

1) عيّن قيم ط بحيث يكون $\text{تا}_{\text{ط}}$ (س) كثير حدود من الدرجة الثانية .

2) عيّن قيم ط بحيث يكون:

أ) $\text{تا}_{\text{ط}}$ (س) كثير حدود من الدرجة الأولى

ب) $\text{تا}_{\text{ط}}(1) = 0$

حـ) $\text{تا}_{\text{ط}}(0) = 0$

د) $\text{تا}_{\text{ط}}(2) = 0$

حل المعادلة تا (س) = 0 في كل من الحالات الثلاث أ) ب) حـ)

50. ط عدد حقيقي و $تا_{ط}$ (س) كثير حدود حيث :

$تا_{ط}$ (س) = (ط − 1) $س^2$ + 2 (ط + 3) س + ط

1) عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط بحيث يكون :

$تا_{ط}$ (س) موجبا من أجل س = 2 وَ سالبا من أجل س = − $\sqrt{5}$

2) عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي س بحيث يكون

$تا_{1}$ (س) موجبا وَ $تا_{0}$ (س) سالبا

51. حل ، في ح، المعادلات التالية ذات المجهول س والوسيط الحقيقي ط .

1) 3 $س^2$ − 27 = (س − 3) (ط س + 1)

2) $س^2$ − 1 = ط ($س^2$ + 1)

3) $س^2$ − 1 = 2 ط ($س^2$ + 1)

4) $(س − 1)^2$ = ط ($س^2$ − 1)

5) $س^2$ − 4 س + 4 − 2 ط (س − 2) + $ط^2$ = 0

52. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س . والوسيط الحقيقي ط

1) ط $س^2$ + 2 س − ط ≥ 0

2) ط $س^2$ − 2 س + 1 < 0

3) 2 $س^2$ + ط س − ط + 1 < 0

4) (ط س − 1) (س − 2) > 0

53. عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط بحيث يكون :

1) ∀ س ∈ ح : (5 − ط) $س^2$ − 2 (1 − ط) س + 2 (1 − ط) > 0

2) ∀ س ∈ ح : (2 ط + 5) $س^2$ + 4 (ط + 3) س + 3 ط > 0

54. عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتي لا يكون للمتراجحة :

(ط − 5) $س^2$ − (3 ط + 4) س + ط − 5 > 0 حل

55. ط عدد حقيقي وَ تا$_{ط}$ (س) كثير حدود حيث :

تا$_{ط}$ (س) = (ط + 2) س^{2} − 2 (ط − 1) س + ط − 2

عيّن مجموعة قيم الوسيط ط بحيث تكون إشارة تا$_{ط}$ (س) ثابتة مهما كان العدد س .

ما هي عندئذ إشارة تا$_{ط}$ (س) ؟

56. نفس الأسئلة بالنسبة إلى كثير الحدود :

تا$_{ط}$ (س) = (ط + 2) س^{2} + ط (س) + ط − 1

57. تحقق أن لكل معادلة من المعادلات التالية حلا هو أحد الأعداد : − 1 ، + 1 ، − 2 ، + 2

ثم احسب حلها الثاني :

1) س^{2} + 7 س − 8 = 0
2) − س^{2} + س + 6 = 0
3) 2 س^{2} + 3 س − 5 = 0
4) 2 س^{2} − س − 10 = 0
5) 4 س^{2} + س − 3 = 0
6) س^{2} + 3 س − 4 = 0
7) − س^{2} + 3 س + 4 = 0
8) − س^{2} + 3 س + 4 = 0

58. لتكن المعادلة من الدرجة الثانية

س^{2} − 7 س − 4 = 0 و س′ ، س″ حلاها

• أحسب ما يلي :

1) س′ + س″ 2) س′ . س″ 3) س′^{2} + س″^{2}

4) $\frac{1}{\text{س}'} + \frac{1}{\text{س}''}$ 5) $\frac{\text{س}''}{\text{س}'} + \frac{\text{س}'}{\text{س}''}$

• عيّن معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين هما : $\frac{1}{\text{س}'}$ ، $\frac{1}{\text{س}''}$

59. ادرس ، حسب قيم العدد الحقيقي ط ، إشارة حلول كل من المعادلات التالية

1) س^{2} − (ط + 3) س + ط − 4 = 0
2) (ط − 3) س^{2} − 2 ط س + ط + 2 = 0
3) ط^{2} س^{2} + 5 س − ط^{2} = 0

4) $(ط - 1)س^2 - (ط + 3)س + 2(1 - ط) = 0$

5) $(ط - 5)س^2 - 2(ط + 3)س + (ط + 1) = 0$

6) $س^2 + 2ط\,س + ط^2 + ط + 5 = 0$

7) $(ط^2 - 1)س^2 + (ط + 1)س + 5 = 0$

8) $(3ط - 7)س^2 + 2(ط - 1)س + 2 = 0$

جمل معادلات . جمل متراجحات :

60. عيّن مجموعة حلول كل معادلة من المعادلات التالية ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع .

1) $2س + 3ع - 1 = 0$

2) $س^2 + 3س = 1$

3) $س^3 - س\,ع + 5 = 0$

واذكر ثلاثة حلول لكل منها

61. حل ، في ح × ح الجمل التالية :

1) $\begin{cases} س + ع = 5 \\ س - ع = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} س - 3ع = 5 \\ 2س + 6ع = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -س + 3ع = 1 \\ 2س - 6ع = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{س}{2} + 3ع = -1 \\ -2س - 12ع = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2س - 4ع + 4 = 0 \\ -س + 3ع - 2 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2س + 2ع - 3 = 0 \\ -3س - ع + 1 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{2س - 1}{4} + 3ع = -1 \\ \frac{س + 4ع}{2} - س - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{\text{س}+1}{2} - \dfrac{\text{ع}+3}{4} - 1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\text{س}-1}{2} - \dfrac{\text{ع}-1}{4} - 1 = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \text{س} + \text{ع}^2 = 5 \\ \text{س} - 3\text{ع} = -5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \text{س} + (1-\sqrt{3})\,\text{ع} + 1 + \sqrt{3} = 0 \\ (1+\sqrt{3})\,\text{س} - 2\text{ع} + 4 + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$

62. أ) حل ، في ح × ح ، الجملة التالية :

$$\begin{cases} 5\,\text{س} + 2\text{ع} - 70 = 0 \\ 3\text{ع} - 5\,\text{س} - 55 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

ب) استعمل نتيجة السؤال السابق لحل الجملة التالية :

$$\begin{cases} 5\,\text{س}^2 + 2\text{ع}^2 = 70 \\ 3\text{ع}^2 - 5\,\text{س}^2 = 55 \end{cases} \qquad (2)$$

63. نفس التمرين بالنسبة إلى الجملتين :

$$\begin{cases} \text{س} + \text{ع} - 8 = 0 \\ 3\,\text{س} + 5\text{ع} - 32 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} (\text{س}-3)^2 + (\text{ع}-2)^2 = 8 \\ 3(\text{س}-3)^2 + 5(\text{ع}-2)^2 = 32 \end{cases} \qquad (2)$$

64. نفس التمرين بالنسبة إلى الجملتين

$$\begin{cases} 15\,س + 12\,ع = 4 \\ 4\,س - 4\,ع = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{15}{س} + \frac{12}{ع} - 4 = 0 \\ \frac{4}{س} - \frac{4}{ع} - \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

65. حل، في ح×ح، الجمل التالية :

1) $\begin{cases} \sqrt{س} + \sqrt{ع} = 15 \\ \sqrt{س} - \sqrt{ع} = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{4}{س - 2} + \frac{1}{ع - 1} - 5 = 0 \\ \frac{4}{س - 2} + \frac{1}{ع - 1} - 2 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{4}{س} - ع^2 + 5 = 0 \\ \frac{1}{س} + 2ع^2 - 5 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} |س| + |ع| = 7 \\ 2|س| + |ع| = 11 \end{cases}$

66. حل ، في ح × ح ، الجمل التالية :

1) $\begin{cases} \text{س} + \text{ع} = 15 \\ \text{س} . \text{ع} = 14 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \text{س} + \text{ع} = -1 \\ \text{س} . \text{ع} = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\text{ع}} = \dfrac{6}{5} \\ 4\,\text{س} - 3\,\text{ع} = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{س}\,\text{ع} = 5 \\ \text{س} . \text{ع} = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{1}{\text{س}^2} + \dfrac{1}{\text{ع}^2} = 2 \\ \text{س}\,\text{ع} = -1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \text{س}^2 + \text{ع}^2 = \dfrac{40}{9} \\ \text{س} + \text{ع} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

67. حل ، في ح × ح ، الجمل التالية حيث س و ع هما المجهولان وَ ط وسيط حقيقي .

1) $\begin{cases} \text{ع} = \text{ط}\,\text{س} - 1 \\ \text{س} - 2\,\text{ع} = 1 \end{cases}$

$$(2\quad \begin{cases} \text{س} + \text{ع} = -12 \\ \text{س} \,.\, \text{ع} = 2\,\text{ط} \end{cases}$$

$$(3\quad \begin{cases} \text{س} + \text{ع} = \text{ط} - 1 \\ \text{س} - \text{ع} = 4 \end{cases}$$

$$(4\quad \begin{cases} \text{س} + \text{ع} = \text{ط} - 1 \\ \text{س} \,.\, \text{ع} = 4 \end{cases}$$

$$(5\quad \begin{cases} \text{س} + \text{ع} = \text{ط} - 1 \\ \dfrac{\text{س}}{\text{ع}} = 4 \end{cases}$$

$$(6\quad \begin{cases} \text{س} + \text{ع} = \text{ط} - 1 \\ \text{س}^2 + \text{ع}^2 = 4 \end{cases}$$

$$(7\quad \begin{cases} \text{س} + (\text{ط} - 1)\,\text{ع} = 1 \\ \text{س}^2 + \text{ع} = 3 \end{cases}$$

$$(8\quad \begin{cases} \text{س} + 3\,\text{ع} = \text{ط} \\ 2\,\text{س} + \text{س}\,\text{ع} = 4 \end{cases}$$

$$(9\quad \begin{cases} (\text{ط} - 1)\,\text{س} + 2\,\text{ع} = 5 \\ 2\,\text{س} + (\text{ط} - 1)\,\text{ع} = 1 \end{cases}$$

$$(10\quad \begin{cases} (\text{ط} - 1)\,\text{س} + 2\,\text{ع} = 1 \\ (\text{ط} - 1)\,\text{س} + \text{ط}\,\text{ع} = 1 \end{cases}$$

11) $\begin{cases} (ط - 4)\,س - 2\,ع = 3 \\ س - (ط - 3)\,ع = ط - 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} (ط - 1)\,س + (ط^2 - 1)\,ع = ط^3 - 1 \\ 2\,س + 3\,ع = 5 \end{cases}$

13) $\begin{cases} (ط - 1)\,س + (ط - 2)\,ع = 3\,ط - 1 \\ (ط^2 - 1)\,س + (ط^2 - 4)\,ع = 5\,ط + 1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} ط^2\,س + ع = 0 \\ س + ط^2\,ع = 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} (ط + 1)\,س + (3\,ط - 1)\,ع = 0 \\ 2\,س + 5\,ع = 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} (ط - 1)\,س + 2\,ط\,ع = 0 \\ ط\,س + (ط + 6)\,ع = 0 \end{cases}$

68. حل ، في ح×ح الجملتين

1) $\begin{cases} \dfrac{4}{س} + \dfrac{ط}{ع} = 1 \\ \dfrac{ط}{س} + \dfrac{1}{ع} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{س + 1} + \dfrac{ط}{ع - 2} = 0 \\ \dfrac{ط}{س + 1} + \dfrac{4}{ع - 2} = 5 \end{cases}$

69. حل بيانيا المتراجحات التالية :

1) 2 س − 5 ع + 1 ⩽ 0 2) س + 3 ع − 1 > 0

3) − 2,5 س + $\frac{7}{6}$ ع − $\frac{2}{3}$ > $\frac{1}{3}$ س − ع + 3

70. حل بيانيا جمل المتراجحات التالية :

1)
5 س − 2 ع + 3 ⩽ 0
2 س + 3 ع − 1 < 0

2)
− 5 س + 6 ع + 2 < 0
− س + ع < 0

3)
3 س − 4 ع + 5 > 0
2 س + 3 ع − 1 < 0

4)
3 س − 4 ع + 5 > 0
1 > ع > 3,5

5)
س − 2 ⩽ 0
س + 3 ع + 5 < 0
4 س − 6 ع + 1 > 0

6)
− ع + 3 > 0
2 س − ع − 5 ⩾ 0
4 س − 3 < 0

7) $\begin{cases} 4\text{س} + 15\text{ع} - 60 \leq 0 \\ 5 \leq 2\text{س} + \text{ع} \leq 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} -3 \leq \text{س} - \text{ع} \leq 5 \\ 4|\text{س}| + 3|\text{ع}| \leq 12 \end{cases}$

71. حل بيانيا المتراجحات التالية :

1) $(\text{س} - 2)(\text{ع} + 3) > 0$

2) $(-3\text{س} + \text{ع})(4\text{س} + \text{ع} - 5) \leq 0$

3) $\text{س}^2 - 9\text{ع}^2 \geq 0$

4) $|\text{س}| + |\text{ع}| \leq 3$

تمارين متنوعة

72. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

(ط + 3) س^2 + 2 (3 ط + 1) س + ط + 3 = 0

عيّن ط حتى تقبل هذه المعادلة حلا مضاعفا .

أُحسب هذا الحل المضاعف .

73. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

2 س^2 − (ط + 4) س + ط = 0

عيّن ط حتى يكون 3 حلاً لهذه المعادلة .

أُحسب الحل الآخر .

74. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

ط س^2 − 2 (ط − 2) س + ط − 3 = 0 (1)

أ) عيّن مجموعة قيم ط حتي تقبل االمعادلة (1) حلولاً .

ب) عيّن ط حتى تقبل المعادلة (1) حلين س′ ، س″

يحققان المساواة : 4 (س′ + س″) = 7 س′ . س″

75. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

ط س^2 + (ط − 4) س + 2 ط = 0

عيّن ط حتى تقبل هذه المعادلة حلين س′ ، س″

بحيث يكون : 2 (س′^{2} + س″^{2}) = 5 س′ . س″

76. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

س^2 − (2 ط + 1) س + $\frac{1}{4}$ (3 ط − 1) (2 ط − 1) = 0

1) أُدرس ، حسب قيم الوسيط ط ، وجود وَإشارة الحلين س′ ، س″ لهذه المعادلة

2) أُحسب ط و س″ إذا كان س′ = $\frac{11}{2}$

3) عيّن ط حتى يكون : $\frac{1}{2\text{س}' - 3} + \frac{1}{2\text{س}'' - 3} = -\frac{2}{3}$

أُحسب ، عندئذ ، س′ و س″ .

77. ليكن العدد الحقيقي ط والتطبيق تا$_ط$ للمجموعة ح في نفسها المعرف كما يلي :

$$\text{تا}_\text{ط}(\text{س}) = (2 - \text{ط})\,\text{س}^2 + (\text{ط} - 3)\,\text{س} + 2\,\text{ط} - 5$$

1) عيّن المجموعة مح المعرفة كما يلي :

مح = { س ∋ ح : تا$_ط$ (س) ⩾ 0 }

2) عيّن ط حتى يكون العدد (+ 1) حلا للمعادلة تا$_ط$ (س) = 0 .

حل ، عندئذ ، هذه المعادلة

3) بيّن أن (− 1) حل للمعادلة تا$_ط$ (س) = 0 مهما كان العدد الحقيقي ط .
استنتج أنه ، مهما كان العدد الحقيقي ط يختلف عن 2 ، يمكن وضع تا$_ط$ (س) على شكل جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى .

4) ناقش ، حسب قيم ط ، عدد حلول المعادلة تا$_ط$ (س) = 0

أُحسب هذه الحلول بدلالة ط .

5) هل يمكن تعيين ط حتى تقبل المعادلة تا$_ط$ (س) = 0

حلين لهما نفس الإشارة ؟

6) لتكن الدالة ها$_ط$ للمجموعة ح في نفسها المعرفة كما يلي :

$$\text{ها}_\text{ط}(\text{س}) = \frac{-\text{س}^2 + \text{س} + 2}{\text{تا}_\text{ط}(\text{س})}$$

أ) عيّن ، حسب قيم ط ، مجموعة التعريف ف$_ط$ للدالة ها$_ط$

ب) اختزل ها$_ط$ (س) . ثم حل المعادلة ها$_ط$ (س) = − 1

78. ليكن كثير الحدود تا$_ط$ (س) حيث :

$$\text{تا}_\text{ط}(\text{س}) = (\text{ط}^2 - 3\,\text{ط} + 2)\,\text{س}^2 + (\text{ط} - 2)\,\text{س} + 3$$

عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتى :

1) تقبل المعادلة تا$_ط$ (س) = 0 حلاً وحيداً

2) تقبل المعادلة تا$_ط$ (س) = 0 حلين متساويين

3) لا تقبل المتراجحة $تا_ط$ (س) > 0 حلا
4) يكون العددان $تا_ط$ (1) وَ $تا_ط$ (− 2) موجبين
5) يكون 3 حلاً للمعادلة $تا_ط$ (س) = 0
أُحسب ، عندئذ ، الحل الثاني .

79. $تا_ط$ (س) كثير حدود حيث :
$تا_ط$ (س) = (ط − 1)$س^2$ − (ط + 3) س + 2 (ط − 3)
عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتى يقبل كثير الحدود $تا_ط$ (س) :
1) جذرين جداؤهما يساوي 1
2) جذرين متناظرين
3) جذرين من إشارتين مختلفتين .
4) جذرين موجبين

80. ا ، ب عددان حقيقيان وَ تا تطبيق للمجموعة ح في نفسها معرف كما يلي :
تا (س) = ا س + ب
1) عيّن ا ، ب بحيث يكون : تا (1) = 5 وَ تا (− 3) = 4
2) نفس السؤال من أجل :
• تا (0) = 1 وَ تا $\left(\frac{2}{3}\right)$ = 3
• تا $\left(\frac{1}{2}\right)$ = 4 وَ تا (− 1) = $\frac{3}{4}$

81. ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية وَ تا تطبيق للمجموعة ح في نفسها معرف كما يلي :
تا (س) = ا $س^2$ + ب س + حـ
1) عيّن ا ، ب ، حـ حتى يكون :
تا (0) = 3 وَ تا (− 1) = 0 وَ تا (4) = 1
2) نفس السؤال من أجل : تا (1) = 0 وَ تا (− 2) = 0 وَ تا (3) = $\frac{1}{2}$

82. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)
أ ، ب ، حـ ثلاث نقط إحداثياتها (3 ، 4) ؛ (3 ، − 3) ؛
(− 1 ، − 2) على الترتيب .
1) عيّن معادلات ديكارتية للمستقيمات (أب) ؛ (أحـ) ؛ (ب حـ)
2) عيّن جملة متراجحات من الدرجة الأولى للمجهولين س ، ع مجموعة حلولها هي مجموعة الثنائيات (س ، ع) التي تكون من أجلها النقط ﻫ (س ، ع) داخل المثلث أ ب حـ .

83. ط عدد حقيقي ، ($\Delta_ط$) و ($\Delta'_ط$) مستقيمان معادلتاهما على الترتيب :
(ط − 1) س − ع − ط = 0
2 ط س + 2 ع + 1 = 0
1) بيّن أنه من أجل ط = $-\frac{1}{2}$ يكون المستقيمان ($\Delta_ط$) و ($\Delta'_ط$) متوازيين تماماً
2) نفرض : ط $\neq -\frac{1}{2}$.
عيّن ، بدلالة ط ، إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين ($\Delta_ط$) و ($\Delta'_ط$)

84. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)
ط عدد حقيقي و ($\Delta_ط$) ، ($\Delta'_ط$) مستقيمان معادلتاهما على الترتيب :
2 س − ط ع + 3 = 0
ط س − 2 ع + 3 = 0
1) بيّن أنه من أجل ط = − 2 يكون المستقيمان ($\Delta_ط$) و ($\Delta'_ط$) متوازيين تماماً .
2) بيّن أنه من أجل ط = 2 يكون المستقيمان ($ط_ط$) وَ ($\Delta'_ط$) منطبقين .
3) نفرض ط $\neq$ − 2 وَ ط $\neq$ + 2
عين ، بدلالة ط ، إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين ($\Delta_ط$) و ($\Delta'_ط$) وبيّن أن هذه النقطة تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته : س + ع = 0

85. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

1) حل ، في ح × ح ، الجملة :

$$\begin{cases} (ط - 1)\ س + 2\ ع = ط + 1 & (1) \\ ط\ س + 2\ ط\ ع = ط + 4 & (2) \end{cases}$$

حيث ط وسيط حقيقي .

2) عيّن قيم الوسيط ط حتي تكون المعادلتان (1) وَ (2) معادلتي مستقيمين ($\Delta_ط$) و ($\Delta'_ط$) على الترتيب .

أنشيء المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

بيّن أن جميع المستقيمات ($\Delta_ط$) تشمَل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيها .

3) عيّن العدد ط حتى يكون المستقيان ($\Delta_ط$) وَ ($\Delta'_ط$) متوازيين وأنشئهما .

86. ★ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الحقيقية ح معرفة كما يلي :

$$س \star ع = س ع - 2 (س + ع) + 6$$

1) أثبت أنه يوجد ، في ح ، عنصر حيادي للعملية ★

2) عيّن مجموعة العناصر المتناظرة بالنسبة إلى العملية ★

3) أثبت أنه يوجد ، في ح ، عنصر ماص للعملية ★

87. نعتبر المعادلة التالية :

$$(ط + 2)\ س^2 + (ط - 3)\ س - 5\ ط = 0 \quad (1)$$

حيث س هو المجهول وط وسيط حقيقي .

1) عيّن ، حسب قيم ط ، عدد حلول هذه المعادلة .

2) في حالة وجود حلين س' و س" للمعادلة (1) ، نعتبر النقطتين ه' و ه" اللتين فاصلتاهما س' و س" على الترتيب ، في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

أ) عيّن ط حتى تكون النقطتان ه' و ه" متناظرتين بالنسبة إلى النقطة أ ذات الفاصلة (− 3) .

حدد ، عندئذ ، النقطتين ه' و ه" .

ب) عيّن ط حتى تكون النقطتان ه' و ه" مترافقتين توافقياً بالنسبة إلى النقطتين أ و ب اللتين فاصلتاهما (− 3) و (− 1) على الترتيب .

ح) بيّن أنه توجد ، بين حلّي المعادلة (1) ، علاقة مستقلة عن الوسيط ط .
استعمل هذه العلاقة لايجاد نقطتين ثابتتين ح ، ء يطلب تعيين فاصلتيهما بحيث يكون (ح ، ء ، مَ ، مً) تقسيماً توافقياً .

88. مستطيل محيطه 250 م . إذا أضفنا 20 م إلى طوله وَ أنقصنا 5 م من عرضه ، لا تتغير مساحته .
عين طول وعرض هذا المستطيل .

89. رتّب 42 كتاباً على صفٍّ طوله 1,50 م . سمك بعض الكتب 3 سم وسمك البعض الآخر 5 سم .
ما هو عدد كتب كل نوعٍ ؟

90. عيّن عددين طبيعيين الفرق بينهما 90 ونسبتهما $\frac{23}{5}$

91. عيّن عددين حقيقيين غير معدومين مجموع مقلوبيهما $\frac{5}{36}$ والفرق بين مقلوبيهما $\frac{1}{36}$

92. عدد تلاميذ ثانوية مختلطة 1000 .
بعد أن غادر الثانوية 25 تلميذا و 30 تلميذة ، أصبح عدد البنين ضعف عدد البنات. ما هو عدد البنين وعدد البنات في هذه الثانوية ؟

93. عين عددين طبيعيين الفرق بينهما 6 وَ الفرق بين مربعيهما 216

94. عين مثلثاً قائماً طول وتره ب وَ الفرق بين طولي ضلعيه القائمين ط .
نفرض أن ب ثابت . عين قيم ط حتى يكون للمسألة حل .

95. عين ثلاثة أعداد طبيعية فردية متتابعة مجموعها 99 .
• نفس السؤال إذا كان المجموع هو 101 .

96. ما هو العدد الطبيعي الذي ينبغي إضافته إلى كل من حدّي كسر للحصول على كسر يساوي ضعف الكسر الأولى .

الباب السابع

حساب المثلثات

إن معظم المفاهيم الواردة في هذا الباب (مثل الراديان ، القوس الموجهة ، الزاوية الموجهة) تعتبر جديدة بالنسبة للتلاميذ وتستحق إهتماماً وعناية أكثر لتزويدهم بالعناصر الأساسية في حساب المثلثات .

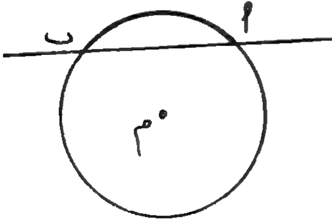
فيما يخص الأقواس الموجهة والزوايا الموجهة ، ـ في شعبة العلوم ـ يكتفي الأستاذ بإعطاء المفاهيم الأساسية دون التوسع في دراستها .

24 الأقواس الموجهة

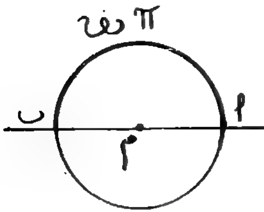
1. الأقواس الهندسية :

1.1 ـ القوس الهندسية :

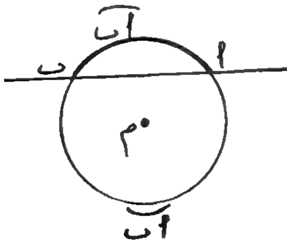
- تُعيّن نقطتان أ ، ب من الدائرة (ى) ذات المركز م ونصف القطر نق قوسين هندسيّين وهما تقاطعَ الدائرة (ى) مع نصفي المستويين المغلقين اللذين حداهما المستقيم (أب)



- إذا كانت النقطتان أ ، ب متناظرتين بالنسبة إلى المركز م يكون لهاتين القوسين نفس الطول π نق (الشكل)



- إذا كانت النقطتان أ ، ب غير متناظرتين بالنسبة إلى المركز م تكون إحدى القوسين ذات طول أصغر من π نق ، نرمز إليها بالرمز $\overset{\frown}{أب}$ وتكون الأخرى ذات طول أكبر من π نق ، نرمز إليها بالرمز $\underset{\smile}{أب}$.
مجموع طولي هاتين القوسين يساوي 2 π نق وهو طول الدائرة (ى)



2.1 ـ قياس الأقواس الهندسية :

لقياس قوس دائرة تستخدم الواحدات التالية :

الدرجة ؛ الغراد ؛ الراديان .

- **الدرجة :**

الدرجة هي قيس قوس دائرة طولها يساوي $\frac{1}{360}$ من طول هذه الدائرة :

ترميز: 1^o

- **الغراد :**

الغراد هو قيس قوس دائرة طولها يساوي $\frac{1}{400}$ من طول هذه الدائرة:

ترميز: 1 غر

- **الراديان :**

الراديان هو قيس قوس دائرة طولها يساوي نصف قطر هذه الدائرة :

ترميز: 1 ر د

- قيس نصف دائرة حسب الواحدات السابقة هو :

  180^o ؛ 200 غر ؛ π ر د

- إذا كان قيس قوس حسب الواحدات السابقة هو α درجة ؛ β غراد ؛ γ راديان

يكون :

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\gamma}{\pi}$$

يبيّن الجدول التالي التقابل بين أقياس بعض الأقواس

الدرجة	30	45	60	90
الغراد	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100
الراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

• طول قوس دائرة :

إذا كان ط طول قوس دائرة نصف قطرها ر وكان α قيسها بالراديان فإن :

$$ط = \alpha\ ر$$

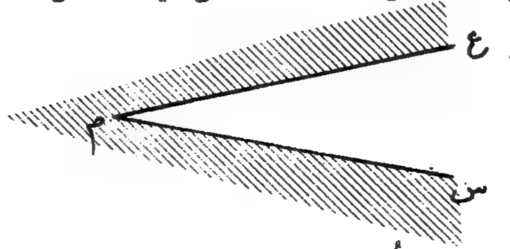
2. الزوايا الهندسية :

1.2 ـ الزاوية الهندسية :

يحدّد نصفا المستقيمين [م س) و [م ع) قطاعين زاويين :

القطاع الزاوي الناتيء (الجزء غير المظلل في الشكل)

والقطاع الزاوي المنعكس (الجزء المظلل في الشكل)



الترميز :

الرمز [م س ، م ع] يُرمز به إلى القطاع الزاوي الناتيء (أو الزاوية الناتئة) الذي رأسه م وضلعاه [م س) و [م ع) .

• إذا تطابق نصفا المستقيمين [م س) و [م ع) فإن الزاوية [م س ، م ع] تسمى الزاوية **المعدومة** .

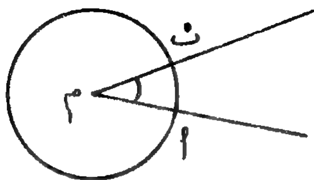
• إذا كان نصفا المستقيمين [م س) و [م ع) متعاكسين فإن الزاوية [م س ، م ع] تسمى الزاوية **المستقيمة** .

2.2 ـ الزاوية المركزية :

(ى) دائرة مركزها م .

أ و ب نقطتان من هذه الدائرة .

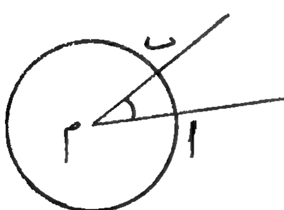
الزاوية [م أ ، م ب] ذات الرأس م والضلعين [م أ) ، [م ب) تسمى **زاوية مركزية** تحصر القوس $\overset{\frown}{أب}$.

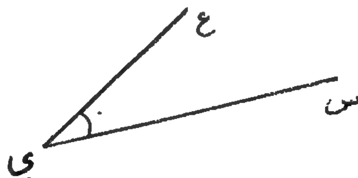


3.2 ـ قياس زاوية هندسية :

(ى) دائرة ذات المركز م . [ي س ، ي ع] زاوية .

توجد نقطتان أ ، ب من هذه الدائرة بحيث تكون الزاويتان [ي س ، ي ع] و [م أ ، م ب] متقايستين .





(لهذا فإنه يمكن أخذ [م أ) و [م ب) موازيين ، على الترتيب ، لنصفي المستقيمين [ي س) و [ي ع) ومن نفس الجهة)

إن قيس الزاوية [ي س ، ي ع] هو قيس القوس الهندسية $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

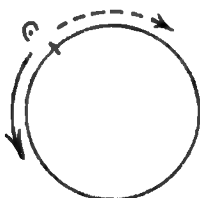
إذا أخترنا وحدة للقياس فإن الرمز $\widehat{\text{س ي ع}}$ يرمز به إلى قيس الزاوية [ي س ، ي ع] .

3. الدائرة الموجهة ، المستوي الموجه :

1.3 ـ الدائرة الموجهة :

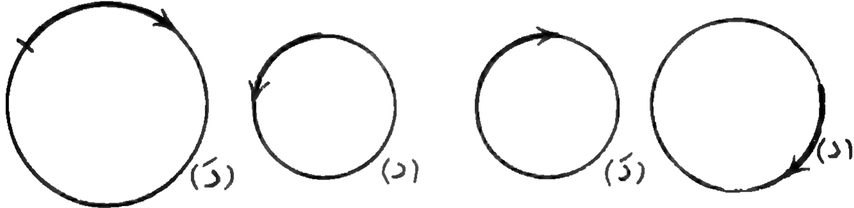
(ى) دائرة معطاة .

ن نقطة متحركة على الدائرة (ى) ؛ يمكن لهذه النقطة أن تتحرك في إتجاهين ممكنين .



إن توجيه الدائرة (ى) يعني اختيار اتجاه للحركة من بين الاتجاهين الممكنين .

إذا كانت (ى) و (ىَ) دائرتين موجهتين فإنه يمكن معرفة إن كانتا موجهتين في نفس الاتجاه أو في اتجاهين متعاكسين .



(ى) و (ىَ) موجهتان في نفس الاتجاه

(ى) و (ىَ) موجهتان في اتجاهين متعاكسين

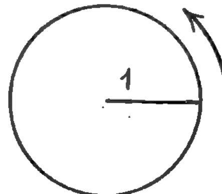
2.3 ـ المستوي الموجه :

إن توجيه المستوي يعني اختيار اتجاه واحد للحركة على جميع دوائر هذا المستوي .
يسمى هذا الاتجاهُ الاتجاه المباشر أو الموجب
والاتجاه الآخر يسمى الاتجاه غير المباشر أو السالب

إن الاتجاه المباشر الذي نختاره عادة هو الاتجاه المخالف لدوران عقارب الساعة .

3.3 ـ الدائرة المثلثية :

نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة نصف قطرها يساوي واحدة الأطوال .



4 ـ الأقواس الموجهة :

1.4 ـ تعريف :

إذا كانت أ و ب نقطتين من دائرة موجهة فإن الثنائية (أ ، ب) تعيّن قوساً موجهة .

نرمز إليها بالرمز $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

النقطة أ تسمى مبدأ القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$

والنقطة ب تسمى نهاية القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$

2.4 ـ القيس الرئيسي لقوس موجهة :

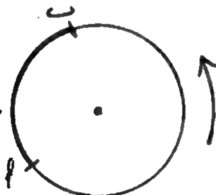
نسمي قيساً رئيسياً ، مقدراً بالراديانات للقوس الموجهة $\overset{\frown}{\text{أب}}$ العدد الحقيقي θ المعرف كما يلي :

- إذا تطابقت النقطتان أ ، ب تكون القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ معدومة و $\theta = 0$
- إذا كانت النقطتان أ ، ب متناظرتين بالنسبة إلى مركز الدائرة يكون $\theta = \pi$
- إذا كانت النقطتان أ ، ب متمايزتين وغير متناظرتين بالنسبة إلى مركز الدائرة فإن :

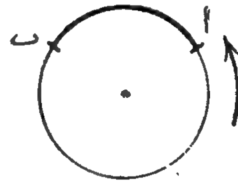
1) القيمة المطلقة للعدد θ هي قيس القوس الهندسية $\overset{\frown}{\text{أب}}$ مقدرًا بالراديانات

2) للحصول على إشارة θ نتصور نقطة م تتحرك على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ ، منطلقة من النقطة أ ومستقرة عند ب :

إذا تحركت هذه النقطة في الاتجاه المباشر يكون العدد θ موجباً وإذا تحركت م في الاتجاه غير المباشر يكون العدد θ سالباً .



$\theta < 0$



$\theta > 0$

مثال : القيس الرئيسي لربع دائرة موجهة يساوي :

إما $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ راديان و إما $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ راديان .

ملاحظة :

القيس الرئيسي لقوس موجهة ، مقدراً بالراديانات هو عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi ، \pi]$.

3.4 ـ أقياس قوس موجهة :

(ى) دائرة في المستوي الموجه و $\overset{\frown}{أب}$ قوس موجهة من هذه الدائرة قيسها الرئيسي θ بالراديان .

لنتصور أن نقطة م تتحرك على الدائرة (ى) دوماً في الاتجاه نفسه ، منطلقة من أ وَ مستقرة عند ب .

يمكن ، بطبيعة الحال ، للنقطة م أن تمر بالنقطة ب عدة مرات .

لنميز حالتين : $\theta \geqslant 0$ و $\theta \leqslant 0$.

• **الحالة الأولى** : $\theta \geqslant 0$

ـ إذا تحركت م في الاتجاه الموجب وعملت ك دورة (ك ∋ ص$_+$) ثم استقرت في النقطة ب ، نقول إنها قطعت ($\theta + 2\pi$ ك) راديانا في الاتجاه الموجب ونكتب :

قيس $\overset{\frown}{أب} = \theta + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص$_+$ (1)

ـ إذا تحركت م في الاتجاه السالب وعملت ك' دورة (ك' ∋ ص$_+$) ثم استقرت في النقطة ب ، نقول إنها قطعت

$\left((2\pi - \theta) + 2\pi \text{ ك}' \right)$ راديانا في الاتجاه السالب ونكتب :

قيس $\overset{\frown}{أب} = -(2\pi - \theta + 2$ ك' $\pi)$

$= \theta + 2\pi\,($ ـ ك' $- 1)$

$= \theta + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص$_-$.

(بوضع ك = − ك′ − 1)

أي قيس $\overset{\frown}{أ ب}$ = $\theta + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص (2)

من (1) و (2) نستنتج أن

قيس $\overset{\frown}{أ ب}$ = $\theta + 2\pi$ ك ، (ك ∋ ص)

• **الحالة الثانية** : $\theta \geqslant 0$

باتباع الطريقة السابقة نحصل على نفس النتيجة السابقة

قيس $\overset{\frown}{أ ب}$ = $\theta + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

الخلاصة :

إذا كانت واحدة القياس هي الراديان وكان θ القيس الرئيسي للقوس الموجهة $\overset{\frown}{أ ب}$ وكان θ' قيساً آخر للقوس $\overset{\frown}{أ ب}$

فإن :

$\theta' = \theta + 2\pi$ ك (ك ∋ ص)

4.4 ـ خواص أقياس أقواس موجهة :

انطلاقاً من النتائج السابقة يمكن التأكد من الخواص التالية

الخاصة 1 :

لكل قوس موجهة $\overset{\frown}{أ ب}$ ما لا نهاية من الأقياس .

ليكن θ_1 قيسا للقوس $\overset{\frown}{أ ب}$.

يكون θ_2 قيسا للقوس $\overset{\frown}{أ ب}$ إذا وفقط إذا كان

$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$ ك (ك ∋ ص)

مثلا :

1) $\frac{3\pi}{2}$ وَ $\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$ قيسان لنفس القوس الموجهة لأن :

$$\frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{13\pi}{2}\right) = 8\pi$$

و 8π من الشكل 2π ك (ك $\in$ ص)

2) π وَ 4π قيسان لقوسين مختلفتين لأن :

$$4\pi - \pi = 3\pi$$

وَ 3π ليس من الشكل 2π ك (ك $\in$ ص)

الخاصة 2 (علاقة شال)

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط من دائرة موجهة (ى)

فإن :

قيس $\overset{\frown}{أب}$ + قيس $\overset{\frown}{بحـ}$ = قيس $\overset{\frown}{أحـ}$ + 2π ك (ك $\in$ ص)

من هذه الخاصة نستنتج أن :

قيس $\overset{\frown}{أب}$ = − قيس $\overset{\frown}{بأ}$ + 2π ك (ك $\in$ ص)

مثال : إذا كان $\frac{\pi}{3}$ قيسا للقوس $\overset{\frown}{أب}$ يكون $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ قيسا للقوس $\overset{\frown}{بأ}$

$\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ليس القيس الوحيد للقوس $\overset{\frown}{بأ}$.

مثلاً $\frac{5\pi}{3}$ قيس آخر للقوس $\overset{\frown}{بأ}$ لأن $\frac{5\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi$

الخاصية :

من أن العدد الحقيقي α ، ومهما كانت النقطة أ من الدائرة الموجهة (د)

فإنه توجد نقطة وحيدة ب بحيث يكون α قيسا ، بالراديانات للقوس

الموجهة $\overset{\frown}{أ ب}$

تمرين محلول :

أ نقطة من دائرة موجهة (د) .
أوجد القيس الرئيسي لكل قوس من الأقواس التالية :
$\overset{\frown}{أ ب}$ ، $\overset{\frown}{أ ب'}$ ، $\overset{\frown}{أ ب''}$ علما أن :

قيس $\overset{\frown}{أ ب} = -75\pi$ ؛ قيس $\overset{\frown}{أ ب'} = \frac{123\pi}{4}$ ؛

قيس $\overset{\frown}{أ ب''} = \frac{65\pi}{3}$

ثم ارسم النقط ب ؛ ب' ؛ ب'' على هذه الدائرة

الحل :

لدينا (1 $-75\pi = \pi + 2(-38\pi)$

القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{أ ب}$ هو π

(2 القسمة الإقليدية للعدد 123 على 4 تعطي :

$$123 = 4 \times 30 + 3$$

ومنه $\frac{123\pi}{4} = \frac{(4 \times 30 + 3)\pi}{4}$

أي : $\frac{123\pi}{4} = 30\pi + \frac{3\pi}{4}$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2(15)\pi$$

القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{أ ب'}$ هو $\frac{3\pi}{4}$

3) القسمة الإقليدية للعدد 65 على 3 تعطي

$$65 = 3 \times 21 + 2$$

ومنه : $\frac{65\pi}{3} = \frac{(3 \times 21 + 2)\pi}{3}$

أي : $\frac{65\pi}{3} = 21\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\left(21\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$ ليس من الشكل $\theta + 2ك\pi$ حيث

$\theta \in]-\pi ، +\pi]$ و ك ∈ ص

لنكتبه على هذا الشكل :

$$21\pi + \frac{2\pi}{3} = 22\pi - \pi + \frac{2\pi}{3}$$

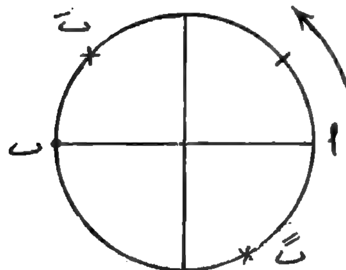
$$= 22\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\pi}{3} + 2(11)\pi$$

القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{أب''}$ هو $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

الأقياس الرئيسية السابقة تسمح لنا برسم النقط

ب ، ب′ ، ب″ (الشكل)



25 الزوايا الموجهة

1 ـ الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين :

1.1 ـ تعريف

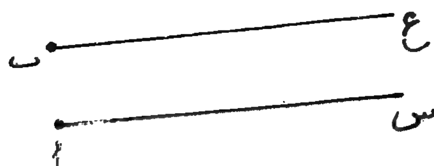
إذا كان [ا س) و [ب ع) نصفي مستقيمين للمستوي الموجه فإن

الثنائية ([ا س) ، [ب ع))

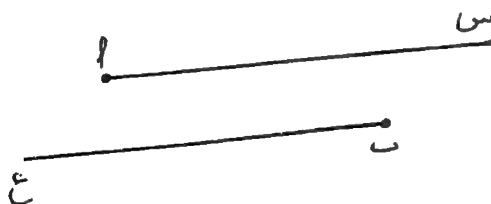
تعيّن زاوية موجهة نرمز إليها بالرمز (ا س ، ب ع)

• نصف المستقيم [ا س) يسمى الضلع المبدأ للزاوية (ا س ، ب ع) ونصف المستقيم [ب ع) يسمى الضلع النهاية لها .

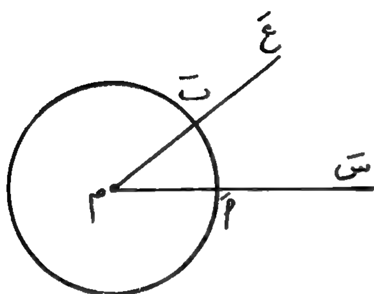
• إذا كان [ا س) و [ب ع) متوازيين وكان لهما نفس الاتجاه تسمى الزاوية (ا س ، ب ع) الزاوية المعدومة



• إذا كان [ا س) و [ب ع) متوازيين ومتعاكسي الاتجاه تسمى الزاوية (ا س ، ب ع) الزاوية المستقيمة .



2.1 ـ أقياس زاوية موجهة :



(ى) دائرة موجهة مركزها م و (أ س ، ب ع) زاوية موجهة لنصفي المستقيمين [أ س) و [ب ع)

[م س′) و [م ع′) نصفا مستقيمين معرفان كما يلي :

[أ س) وَ [م س′) متوازيان ولهما نفس الإتجاه

[ب ع) وَ [م ع′) متوازيان ولهما نفس الاتجاه

نضع : [م س′) ∩ (ى) = { أ′ }

[م ع′) ∩ (ى) = { ب′ }

> نسمي قيساً ، بالراديان ، للزاوية الموجهة (أ س ، ب ع) كل قيس ، بالراديان ، للقوس الموجه $\overset{\frown}{أ′ ب′}$
>
> نكتب : قيس (أ س ، ب ع) = (أ س ، ب ع)

• القيس الرئيسي للزاوية الموجهة (أ س ، ب ع) هو القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{أ′ ب′}$ وهو عدد حقيقي ينتمي إلى المجال] $-\pi$ ، π] .

3.1 ـ خواص أقياس الزوايا الموجهة :

من التعريف السابق ومن خواص أقياس الأقواس المواجهة نستنتج ما يلي :

الخاصة 1 :

لكل زاوية موجهة (أس ، بع) ما لا نهاية من الأقياس .

ليكن θ_1 قيسا للزاوية (أس ، بع)
يكون θ_2 قيسا آخر للزاوية الموجهة (أس ، بع) إذا وفقط إذا
كان : $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$ ك (ك ∈ ص)

الخاصة 2 : (علاقة شال لأقياس الزوايا الموجهة) مهما كانت أنصاف المستقيمات [أس) ، [بع) [حص) لدينا :

(أس ، بع) + (بع ، حص) = (أس ، حص) + 2π ك ، (ك ∈ ص)

من هذه الخاصة نستنتج أن :

(أس ، بع) = − (بع ، أس) + 2π ك ، (ك ∈ ص)

الخاصة 3 :

إذا كان [أس′) و [بع′) نصفي المستقيمين المعاكسين على الترتيب لنصفي المستقيمين [أس) و [بع) يكون :

(أس ، بع) = (أس ، بع′) + π + 2π ك ، (ك ∈ ص)
(أس ، بع) = (أس′ ، بع) + π + 2π ك ، (ك ∈ ص)
(أس ، بع) = (أس′ ، بع′) + 2π ك ، (ك ∈ ص)

الخاصة 4 :

إذا كانت [أس) ، [بع) ، [حص) ، [دق) أنصاف مستقيمات فإن :

(أس ، بع) = (حص ، دق) + 2π ك
$\Updownarrow$
(أس ، حص) = (بع ، دق) + 2π ك

(تبادل نصفي المستقيمين [ب ع) و [حـ ص))

(أ س ، ب ع) = (حـ ص ، د ق) + 2π ك
⇕
(د ق ، ب ع) = (حـ ص ، أ س) + 2π ك

(تبادل نصفي المستقيمين [أ س) و [د ق))

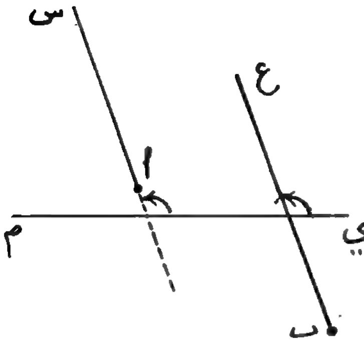
4.1 ـ الزاوية القطبية لنصف مستقيم :

• **تعريف** :

[م ي) نصف مستقيم ثابت للمستوي الموجه .

نسمي زاوية قطبية لنصف المستقيم [أ س) بالنسبة إلى نصف المستقيم [م ي) الزاوية الموجهة (م ي ، أ س)
يسمى نصف المستقيم [م ي) محورا قطبيا للمستوي الموجه

ملاحظة :



إذا كانت لنصفي المستقيمين [أ س) و [ب ع) نفس الزاوية القطبية بالنسبة إلى نصف المستقيم [م ي) فإن [أ س) و [ب ع) متوازيان ولهما نفس الاتجاه .

• قيس الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين معينين بزاويتيهما القطبيتين .

[م ي) محور قطبي للمستو الموجه .

α و β قيسا الزاويتين القطبيتين على الترتيب لنصفي المستقيمين [أ س) و [ب ع) بالنسبة إلى نصف المستقيم [م ي) .

لنبحث عن قيس الزاوية (أ س ، ب ع) بدلالة α و β .

لدينا :

$$(\overline{\text{أس ، ب ع}}) = (\overline{\text{أس ، م ي}}) + (\overline{\text{م ي ، ب ع}}) + 2\pi \text{ ك}$$

$$= -(\overline{\text{م ي ، أس}}) + (\overline{\text{م ي ، ب ع}}) + 2\pi \text{ ك}$$

$$= -\alpha + \beta + 2\pi \text{ ك}$$

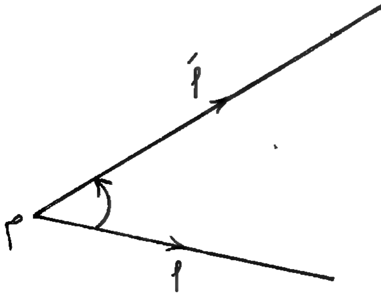
ومنه :

$$(\overline{\text{أس ، ب ع}}) = \beta - \alpha + 2\pi \text{ ك ، ك} \in \text{ص}$$

2 ـ الزاوية الموجهة لشعاعين :

1.2 ـ تعريف :

$\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}}'$ شعاعان غير معدومين من المستوي الموجه ممثلاهما على الترتيب $\overleftarrow{\text{م أ}}$ و $\overleftarrow{\text{م أ}'}$



الزاوية الموجهة ($\overleftarrow{\text{ش}}$ ، $\overleftarrow{\text{ش}}'$) للشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}}'$ هي بالتعريف ، الزاوية الموجهة (م أ ، م أ′) لنصفي المستقيمين [م أ) و [م أ′)

إذا كان الشعاعان $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}}'$ متوازيين وكان لهما نفس الاتجاه فإن الزاوية ($\overleftarrow{\text{ش}}$ ، $\overleftarrow{\text{ش}}'$) هي الزاوية المعدومة .

إذا كان الشعاعان $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}}'$ متوازيين ومتعاكسي الاتجاه فإن الزاوية ($\overleftarrow{\text{ش}}$ ، $\overleftarrow{\text{ش}}'$) هي الزاوية المستقيمة .

2.2 ـ أقياس زاوية موجهة لشعاعين :

$\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}}'$ شعاعان غير معدومين من المستوي الموجه ممثلاهما على الترتيب $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{م أ}'}$

نسمي قيسا للزاوية الموجهة (ش ، ش′) كل قيس للزاوية الموجهة (م أ ، م أ′) .

إذا رمزنا بالرمز (ش ، ش′) لقيس الزاوية الموجهة (ش ، ش′) نكتب

(ش ، ش′) = (م أ ، م أ′) + 2 π ك ، (ك ∈ ص)

حالات خاصة :

(ش ، ش) = 2 π ك ، (ك ∈ ص)

(ش ، − ش) = π + 2 π ك ، (ك ∈ ص)

(− ش ، ش) = π + 2 π ك ، (ك ∈ ص)

3.2 ـ خواص :

من خواص أقياس الزوايا الموجهة لنصفي مستقيمين نستنتج الخواص التالية :

- مهما كانت الأشعة غير المعدومة ش ، ش′ ، ش″ لدينا

(ش ، ش′) = − (ش′ ، ش) + 2 π ك ، (ك ∈ ص)
(ش ، ش′) = (ش ، − ش′) + π + 2 π ك ، (ك ∈ ص)
(ش ، ش′) = (− ش ، ش′) + π + 2 π ك ، ك ∈ ص
(ش ، ش′) = (− ش ، − ش′) + 2 π ك ، ك ∈ ص

- مهما كانت الأشعة غير المعدومة ش ، ش′ ، ق ، ق′ لدينا

(ش ، ش′) = (ق ، ق′) + 2 π ك
$\Updownarrow$ 
(ش ، ق) = (ش′ ، ق′) + 2 π ك

(تبادل الشعاعين ش′ وَ ق)

$$(\overrightarrow{\text{ش}} ، \overrightarrow{\text{ش}'}) = (\overrightarrow{\text{ق}} ، \overrightarrow{\text{ق}'}) + 2\pi \text{ ك}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\overrightarrow{\text{ق}'} ، \overrightarrow{\text{ش}'}) = (\overrightarrow{\text{ق}} ، \overrightarrow{\text{ش}}) + 2\pi \text{ ك}$$

(تبادل الشعاعين $\overrightarrow{\text{ش}}$ وَ $\overrightarrow{\text{ق}'}$)

4.2 ـ تمرين محلول :

ا ب ح مثلث قائم ومتساوي الساقين

ي نقطة من القطعة [ب ح]

نعلم أن $\frac{\pi}{2}$ قيس للزاوية ($\overrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overrightarrow{\text{اح}}$) وَ α قيس للزاوية (اي ، اب)

اُحسب أقياس الزوايا التالية

$(\overrightarrow{\text{اي}} ، \overrightarrow{\text{اح}})$ ؛ $(\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{بح}})$ ؛ $(\overrightarrow{\text{اي}} ، \overrightarrow{\text{بح}})$

لدينا

• $\overline{(\overrightarrow{\text{اي}} ، \overrightarrow{\text{اح}})} = \overline{(\overrightarrow{\text{اي}} ، \overrightarrow{\text{اب}})} + \overline{(\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{اح}})} + 2\pi$ ك (ك ∋ ص)

$= \alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك (ك ∋ ص)



• $\overline{(\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{بح}})} = \overline{(\overrightarrow{\text{با}} ، \overrightarrow{\text{بح}})} + \pi + 2\pi$ ك (ك ∋ ص)

$= -\frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi$ ك (ك ∋ ص)

$\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية ($\overrightarrow{\text{بح}}$ ، $\overrightarrow{\text{با}}$) لأن المثلث ا ب ح قائم ومتساوي الساقين

إذن : (أب ، بح) $= \frac{3\pi}{4} + 2\pi$ ك (ك ∈ ص)

• (أي ، بح) = (أي ، أح) + (أح ، بح) $+ 2\pi$ ك (ك ∈ ص)

= (أي ، أح) + (حأ ، حب) $+ 2\pi$ ك (ك ∈ ص) ،

$= \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} + 2\pi$ ك

$= \alpha + \frac{3\pi}{4} + 2\pi$ ك

3 ـ الزاوية الموجهة لمستقيمين :

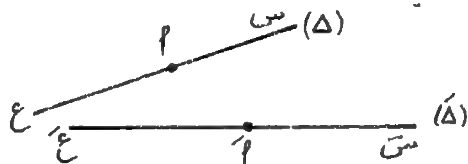
1.3 ـ تعريف :

كل زاوية موجهة ضلعها المبدأ نصف مستقيم من مستقيم (Δ) وضلعها النهاية نصف مستقيم من مستقيم (Δ′) تعيّن زاوية موجهة للمستقيمين (Δ) و (Δ′)

نرمز اليها بالرمز (Δ ، Δ′)

2.3 ـ قيس زاوية موجهة لمستقيمين :

(Δ) و (Δ′) مستقيمان من المستوي الموجه أ نقطة من (Δ) و أ′ نقطة من (Δ′)



النقطة أ تحدد على (Δ) نصفي مستقيمين [أ س) و [أ ع)

النقطة أ′ تحدد على (Δ′) نصفي مستقيمين [أ′ س′) وَ [أ′ ع′) .

ليكن θ قيسا للزاوية (أس ، أ′ س′)

لدينا

$$\overline{(أس ، أ'ع')} = \overline{(أس ، أ'س')} + \overline{(أ'س' ، أ'ع')} + 2ك_1\pi$$
$$= \theta + \pi + 2ك_1\pi \quad (ك_1 \in ص)$$

كذلك

$$\overline{(أع ، أ'س')} = \overline{(أع ، أس)} + \overline{(أس ، أ'س')} + 2ك_2\pi$$
$$= \pi + \theta + 2ك_2\pi \quad (ك_2 \in ص)$$

وَ
$$\overline{(أع ، أ'ع')} = \overline{(أع ، أ'س')} + \overline{(أ'س' ، أ'ع')} + 2ك_3\pi$$
$$= (\pi + \theta) + \pi + 2\pi ك_3$$
$$= \theta + 2\pi(ك_3 + 1)$$

نلاحظ ان كل قيس للزوايا الاربع المذكورة آنفا التي ضلعها المبدأ هو نصف مستقيم من (Δ) وضلعها النهاية هو نصف مستقيم من (Δ') هو من الشكل $\theta + 2ك\pi$ أو من الشكل $\theta + (2ك + 1)\pi$

فهو ، إذاً من الشكل $\theta +$ ك ، (ك $\in$ ص)

يسمى العدد $\theta +$ ك π قيسا للزاوية الموجهة (Δ ، Δ')

ونكتب :

$$\overline{(\Delta ، \Delta')} = \theta + ك\pi ، (ك \in ص)$$

3.3 ـ خواص :

خواص أقياس الزوايا الموجهة لمستقيمين تستنتج من خواص أقياس الزوايا الموجهة لنصفي مستقيمين فيكون لدينا :

- $\overline{(\Delta ، \Delta')} + \overline{(\Delta' ، \Delta'')} = \overline{(\Delta ، \Delta'')} + ك\pi$
- $\overline{(\Delta ، \Delta')} = -\overline{(\Delta' ، \Delta)} + ك\pi$
- $\overline{(ق ، ق')} = \overline{(\Delta ، \Delta')} + ك\pi \Longleftrightarrow \overline{(ق ، \Delta)} = \overline{(ق' ، \Delta')} + ك\pi$
- $\overline{(ق ، ق')} = \overline{(\Delta ، \Delta')} + ك\pi \Longleftrightarrow \overline{(\Delta' ، ق')} = \overline{(\Delta ، ق)} + ك\pi$
- $(\Delta) // (\Delta') \Longleftrightarrow \overline{(\Delta ، \Delta')} = ك\pi ، ك \in ص$
- $(\Delta) \perp (\Delta') \Longleftrightarrow \overline{(\Delta ، \Delta')} = \frac{\pi}{2} + ك\pi ، ك \in ص$

4.3 ـ تطبيقات : منصفا زاوية مستقيمين :

(ق) و (ق′) مستقيمان و α قيس للزاوية الموجهة (ق ، ق′) لنبحث عن مجموعة المستقيمات (Δ) بحيث يكون

$$\overline{(ق ، \Delta)} = \overline{(\Delta ، ق')} + ك\pi \quad (ك \in ص) \quad (1)$$

لدينا :

• $\overline{(ق ، \Delta)} = \overline{(ق ، ق')} + \overline{(ق' ، \Delta)} + ك\pi$ (علاقة شال)

$= \overline{(ق ، ق')} - \overline{(\Delta ، ق')} + ك\pi$

$= \overline{(ق ، ق')} - \overline{(ق ، \Delta)} + ك\pi$ (حسب (1))

ومنه :

$$\overline{(ق ، \Delta)} + \overline{(ق ، \Delta)} = \overline{(ق ، ق')} + ك\pi$$

باضافة $\overline{(ق ، \Delta)}$ إلى طرفي المساواة السابقة

إذن :

$$2\overline{(ق ، \Delta)} = \alpha + ك\pi$$

$$\overline{(ق ، \Delta)} = \frac{1}{2}\alpha + ك\frac{\pi}{2} \quad (ك \in ص) \quad (2)$$

في المساواة (2) العدد ك يأخذ جميع القيم الصحيحة : فعندما يأخذ القيم الزوجية فإن المساواة (2) تكتب :

$$\overline{(ق ، \Delta)} = \frac{1}{2}\alpha + ك'\pi \quad \text{بوضع } ك = 2ك'$$

وعندما يأخذ القيم الفردية فإن المساواة (2) تكتب :

$$\overline{(ق ، \Delta)} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{2} + ك'\pi \quad \text{بوضع } ك = 2ك' + 1$$

وبالتالي يوجد مستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) يحققان المساواة (1) وهما معرفان كما يلي :

$$\overline{(ق ، \Delta_1)} = \frac{1}{2}\alpha + ك' \pi \text{ ، } ك' \in ص$$

$$\overline{(ق ، \Delta_2)} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{2} + ك' \pi \quad (ك' \in ص)$$

يسمى المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) منصفي الزاوية الموجهة (ق ، ق') وهما متعامدان لأن

$$(\Delta_1 ، \Delta_2) = \overline{(\Delta_1 ، ق)} + \overline{(ق ، \Delta_2)} + ك \pi$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + ك' \pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + ك' \pi$$

---

26 حساب المثلثات

1 ـ مراجعة المفاهيم المدروسة في حساب المثلثات :

1.1 ـ النسب المثلثية لزاوية حادة :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م $\overleftarrow{و}$، $\overleftarrow{ي}$)

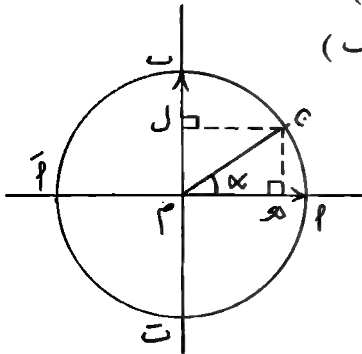
(ى) دائرة مركزها م ونصف قطرها 1 .

أ ، ب نقطتان حيث $\overleftarrow{م أ}$ = $\overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{م ب}$ = $\overleftarrow{ى}$.

ن نقطة من القوس $\overset{\frown}{أ ب}$ و α قيس للزاوية [م أ ، م ن] .

هـ المسقط العمودي للنقطة ن على (م أ)

ل المسقط العمودي للنقطة ن على (م ب)



نعلم أن :

- فاصلة النقطة ن هي **جيب تمام** الزاوية [م أ ، م ن] التي قيسها α

تجب α = $\overline{م هـ}$

- ترتيب النقطة ن هو **جيب** الزاوية [م أ ، م ن] التي قيسها α

جب α = $\overline{م ل}$

- إذا كانت ن تختلف عن كل من ب و بَ فإن النسبة $\frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha}$ هي **ظل** الزاوية [م أ ، م ن] التي قيسها α

ظل α = $\frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha}$

• إذا كانت النقطة ﻫ تختلف عن كل من أ و أ′ فإن النسبة $\frac{\text{تجب } \alpha}{\text{جب } \alpha}$

هي **ظل تمام** الزاوية [م أ ، م ﻫ] التي قيسها α .

$$\text{تظل } \alpha = \frac{\text{تجب } \alpha}{\text{جب } \alpha}$$

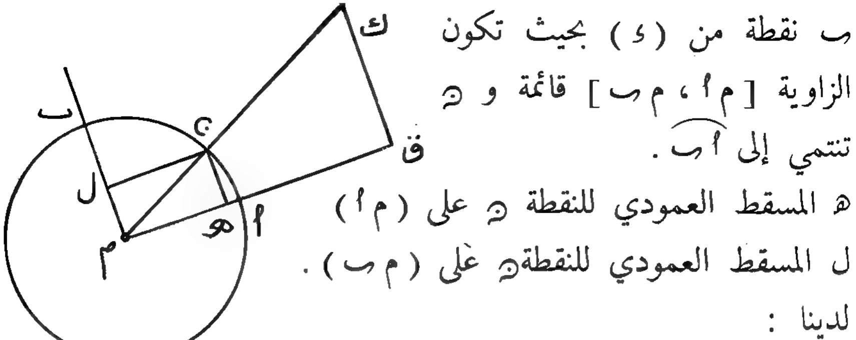
ملاحظة :

عندما تنتمي النقطة ﻫ إلى $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ فإن إحداثيها موجبان ويمكننا أن نكتب :

تجب α = م هـ ؛ جب α = م ل

2.1 ـ النسب المثلثية لزاوية حادة من مثلث قائم :

م ق ك مثلث قائم في ق ؛ و α قيس للزاوية [م ق ، م ك] . الدائرة (ى) التي مركزها م ونصف قطرها 1 تقطع [م ق] في أ وتقطع [م ك) في ﻫ .



ب نقطة من (ى) بحيث تكون الزاوية [م أ ، م ب] قائمة و ﻫ تنتمي إلى $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$.

هـ المسقط العمودي للنقطة ﻫ على (م أ)

ل المسقط العمودي للنقطة ﻫ على (م ب) .

لدينا :

$$\frac{\text{م ق}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{م ك}}{\text{م ﻫ}} \quad \text{(نظرية طاليس)}$$

ومنه : $\frac{\text{م ق}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ﻫ}}$

أي $\frac{\text{م ق}}{\text{م ك}} = $ م هـ (لأن م ﻫ = 1)

أي $\frac{م ق}{م ك}$ = تجب α (بالتعريف) .... (1)

كذلك : من المساواة $\frac{ق ك}{هـ ن} = \frac{م ك}{م ن}$

نستنتج : $\frac{ق ك}{م ك} = \frac{هـ ن}{م ن}$

ومنه : $\frac{ق ك}{م ك}$ = هـ ن = م ل = جب α

$\frac{ق ك}{م ك}$ = جب α .... (2)

من المساواتين (1) و (2) نستنتج :

$\frac{ق ك}{م ق}$ = ظل α و $\frac{م ق}{ق ك}$ = تظل α

إذا كان م ق ك مثلثًا قائمًا في ق وكان α قيسا للزاوية [م ق ، م ك] فإن :
تجب α = $\frac{م ق}{م ك}$ ؛ جب α = $\frac{ق ك}{م ك}$
ظل α = $\frac{ق ك}{م ق}$ ؛ تظل α = $\frac{م ق}{ق ك}$

3.1 ـ نتائج أساسية :

• إذا كان α و α′ قيسين لزاويتين متتامتين فإن

تجب α = **جب** α′ و **جب** α = **تجب** α′

• إذا كان α قيسا لزاوية حادة فإن :

$$\text{تجب}^2 \alpha + \text{جب}^2 \alpha = 1$$

• إذا كان α قيسا لزاوية حادة وجب α ≠ 0 وتجب α ≠ 0

فإن :

$$\text{تظل } \alpha = \frac{1}{\text{ظل } \alpha}$$

$$1 + \text{ظل}^2 \alpha = \frac{1}{\text{تجب}^2 \alpha}$$

• يبيّن الجدول التالي قيم النسب المثلثية لبعض الزوايا

قيس الزاوية	الجيب	جيب التمام	الظل	ظل التمام
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 ـ جيب تمام وجيب عدد حقيقي :

1.2 ـ الدائرة المثلثية :

المستوي الموجه منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(\text{م}، \overleftarrow{\text{و}}، \overleftarrow{\text{ى}})$

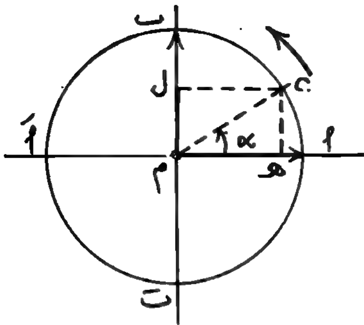
الدائرة الموجهة (ى) التي مركزها م ونصف قطرها 1 تسمى الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم $(\text{م}، \overleftarrow{\text{و}}، \overleftarrow{\text{ى}})$

نسمي فيما يلي أ ، أ′ ، ب ، ب′
النقط من الدائرة (ى) المعرفة كما
يلي :
أ (1 ، 0) ؛ أ′ (−1 ، 0) ؛
ب (0 ، 1) ؛ ب′ (0 ، −1)

2.2 ـ جيب تمام وجيب عدد حقيقي :

إذا كان α عدداً حقيقياً فإنه توجد نقطة وحيدة ن تنتمي إلى الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا ، بالراديان ، للقوس $\overset{\frown}{\text{أن}}$

نسمي جيب تمام العدد الحقيقي α فاصلة النقطة ن ونرمز إليه بالرمز تجب α



نسمي جيب العدد الحقيقي α ترتيب النقطة ن ونرمز إليه بالرمز جب α

إذن :

إذا كان هـ المسقط العمودي للنقطة ن على (م أ)
وكان ل المسقط العمودي للنقطة ن على (م ب)
فإن :

$$\text{تجب}\ \alpha = \overline{\text{م هـ}} \quad ; \quad \text{جب}\ \alpha = \overline{\text{م ل}}$$

- يسمى محور الفواصل **محور جيوب التمام** ويسمى محورُ التراتيب **محورَ الجيوب** .

- نلاحظ أنه عندما تنتمي النقطة ن إلى الدائرة المثلثية (ى) فإن النقطتين هـ و ل تنتميان ، على الترتيب ، إلى القطعتين [أ' أ] و [ب' ب] .

ومنه :

$$-1 \leqslant \text{تجب}\ \alpha \leqslant 1 \quad \text{و} \quad -1 \leqslant \text{جب}\ \alpha \leqslant 1$$

- نعلم أنه إذا كان α قيساً للقوس $\overset{\frown}{\text{أن}}$ فإن كل عدد من الشكل $\alpha + 2\pi$ ك (ك ∈ ص) هو قيس للقوس $\overset{\frown}{\text{أن}}$.

وبالتالي :

$$\text{تجب}\,(\alpha + 2\pi\,\text{ك}) = \text{تجب}\ \alpha \quad (\text{ك} \in \text{ص})$$
$$\text{جب}\,(\alpha + 2\pi\,\text{ك}) = \text{جب}\ \alpha \quad (\text{ك} \in \text{ص})$$

- من المساواة $\text{م هـ}^2 + \text{هـ ن}^2 = \text{م ن}^2$

نستنتج : $\text{تجب}^2\,\alpha + \text{جب}^2\,\alpha = 1$

3 ـ ظل وظل تمام عدد حقيقي :

1.3 ـ ظل عدد حقيقي :

تعريف :

α عدد حقيقي بحيث تجب α ≠ 0 .

نسمي ظل العدد α النسبة $\dfrac{\text{جب}\ \alpha}{\text{تجب}\ \alpha}$ ونرمز إليه بالرمز **ظل** α

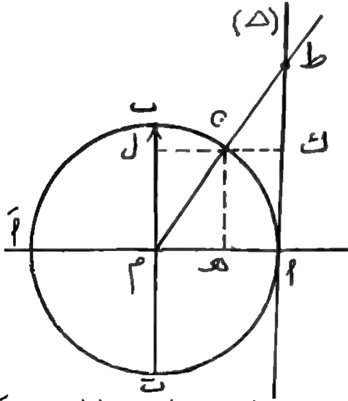
- التفسير الهندسي

نعلم أنه :

إذا كان α عدداً حقيقياً فإنه توجد نقطة وحيدة ن من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{\text{أن}}$.

نسمي : ﻫ المسقط العمودي للنقطة ﻥ على (م أ)

و ل المسقط العمودي للنقطة ﻥ على (م ب) و (△) المماس للدائرة (ى) في النقطة أ .



إذا كان تجب $\alpha \neq 0$ فإن النقطة ﻥ تختلف عن النقطتين ب و بَ والمستقيم (م ﻥ) يقطع (△) في النقطة ط .

نسمي ك نقطة تقاطع المستقيمين (ل ﻥ) و (△) .

من توازي المستقيمين (أ ط) و (ﻫ ﻥ) وبتطبيق نظرية طاليس يكون لدينا : $\frac{\overline{\text{م أ}}}{\overline{\text{م ﻫ}}} = \frac{\overline{\text{م ط}}}{\overline{\text{م ﻥ}}}$ ...... (1)

كذلك من توازي المستقيمين (م أ) و (ك ﻥ) وتطبيقاً لنظرية طاليس يكون لدينا :

$$\frac{\overline{\text{م ط}}}{\overline{\text{م ﻥ}}} = \frac{\overline{\text{أ ط}}}{\overline{\text{أ ك}}} \quad .... \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج : $\frac{\overline{\text{م أ}}}{\overline{\text{م ﻫ}}} = \frac{\overline{\text{أ ط}}}{\overline{\text{أ ك}}}$

أي : $\overline{\text{أ ط}} = \frac{\overline{\text{م أ}}}{\overline{\text{م ﻫ}}} \times \overline{\text{أ ك}}$

أي : $\overline{\text{أ ط}} = \frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha}$

لأن : $\overline{\text{م أ}} = 1$ ؛ $\overline{\text{م ﻫ}} =$ تجب α ؛ $\overline{\text{أ ك}} = \overline{\text{م ل}} =$ جب α

إذن : $\overline{أ ط} = ظل\ \alpha$

يسمى المحورُ (△ ، $\overleftarrow{ى}$) **محورَ الظِّلاَل**

• **خاصة** :

من المساواة تجب$^2\ \alpha$ + جب$^2\ \alpha = 1$

نستنتج : $\frac{تجب^2\ \alpha + جب^2\ \alpha}{تجب^2\ \alpha} = \frac{1}{تجب^2\ \alpha}$

أي : $1 + ظل^2\ \alpha = \frac{1}{تجب^2\ \alpha}$

2.3 ـ ظل تمام عدد حقيقي :

α عدد حقيقي بحيث جب $\alpha \neq 0$

نسمي ظل تمام العدد α النسبة $\frac{تجب\ \alpha}{جب\ \alpha}$ ونرمز إليه بالرمز **تظل** α

نلاحظ أنه إذا كان تجب $\alpha \neq 0$ و جب $\alpha \neq 0$ فإن :

$$تظل\ \alpha = \frac{1}{ظل\ \alpha}$$

3.3 ـ قيم تجب ، جب ، ظل ، تظل بعض الاعداد :

يبيّن الجدول التالي قيم جيب تمام ، جيب ، ظل ، وتظل الأعداد التالية

0 ؛ $\frac{\pi}{6}$ ؛ $\frac{\pi}{4}$ ؛ $\frac{\pi}{3}$ ؛ $\frac{\pi}{2}$.

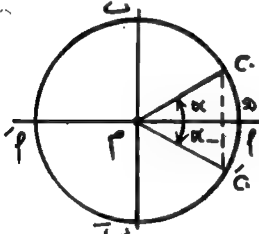
العدد	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
جب α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
تجب α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ظل α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف
تظل α	غير معرف	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4 ـ العلاقات بين جيوب . جيوب تمام وظلال عددين α و $\bar{\alpha}$ مجموعهما أو فرقهما : 0 أو π أو $\frac{\pi}{2}$

1.4 ـ $\boxed{\alpha - \bar{\alpha} = 0}$

لدينا $\bar{\alpha} = -\alpha$

لتكن هـ و هـ' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس أهـ⌒ ويكون $(-\alpha)$ قيسا للقوس أهـ'⌒



تسمى القوسان أهـ⌒ و أهـ'⌒ قوسين متعاكستين والزاويتان (م أ ، م هـ) و (م أ ، م هـ') زاويتين متعاكستين .

بما أن النقطتين هـ و هـ' متناظرتان بالنسبة إلى (أأ') فلهما نفس الفاصلة وترتيباهما متعاكسان .

ومنه :

تجب $(-\alpha)$ = تجب α
جب $(-\alpha)$ = − جب α
ظل $(-\alpha)$ = − ظل α

2.4 ـ $\alpha + \alpha' = \pi$:

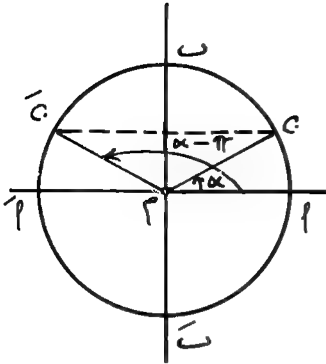
لدينا : $\alpha' = \pi - \alpha$

لتكن ن و ن' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{\text{أن}}$ ويكون $(\pi - \alpha)$ قيسا للقوس $\overset{\frown}{\text{أن'}}$.

تسمى القوسان $\overset{\frown}{\text{أن}}$ و $\overset{\frown}{\text{أن'}}$ قوسين متكاملتين والزاويتان (م أ ، م ن) و (م أ ، م ن') زاويتين متكاملتين .

النقطتان ن و ن' متناظرتان بالنسبة إلى (ب ب') .

فلهما فاصلتان متعاكستان ولهما نفس الترتيب .



ومنه :

تجب $(\pi - \alpha)$ = − تجب α
جب $(\pi - \alpha)$ = جب α
ظل $(\pi - \alpha)$ = − ظل α

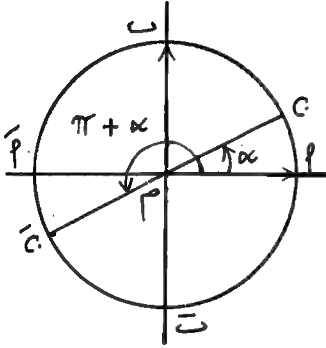
3.4 ـ $\alpha' - \alpha = \pi$:

لدينا $\alpha' = \alpha + \pi$

لتكن ن و ن' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{\text{أن}}$ ويكون $(\alpha + \pi)$ قيسا للقوس $\overset{\frown}{\text{أن'}}$.

النقطتان ن و ن' متناظرتان بالنسبة إلى المركز م .

فلهما فاصلتان متعاكستان وترتيبان
متعاكسان



ومنه :

تجب $(\alpha + \pi) = -$ تجب α
جب $(\alpha + \pi) = -$ جب α
ظل $(\alpha + \pi) =$ ظل α

4.4 ـ $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$

لدينا $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

لتكن ن و ن' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس أن و $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ قيسا للقوس أن' .

تسمى القوسان أن و أن' قوسين متتامتين والزاويتان الموجهتان (م أ ، م ن) و (م أ ، م ن') زاويتين متتامتين .

لقد رأينا أنه إذا كانت لدينا زاويتان متتامتان يكون جيب قيس إحداهما مساوياً لجيب تمام قيس الأخرى ، ويمكن تعميم هذه النتيجة على أقياس زاويتين موجهتين ومتتامتين :

تجب $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ جب α
جب $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ تجب α
ظل $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ تظل α

5.4 ـ $\boxed{\alpha' - \alpha = \dfrac{\pi}{2}}$

لدينا $\alpha' = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$

بتطبيق النتائج السابقة يمكن أن نكتب :

$$\text{تجب}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \text{تجب}\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$$

$$= \text{جب}(-\alpha) = -\,\text{جب}\,\alpha$$

$$\text{جب}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \text{جب}\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$$

$$= \text{تجب}(-\alpha) - \text{تجب}\,\alpha$$

$$\text{ظل}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \text{ظل}\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$$

$$= \text{تظل}(-\alpha) = -\,\text{تضل}\,\alpha$$

---

27 المعادلات المثلثية الأساسية

1 ـ المعادلات من الشكل تجب س = تجب α

1.1 ـ الأعداد التي لها نفس جيب التمام :

• α و β عددان حقيقيان و ن ، ن′ نقطتان من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{أن}$ و β قيسا للقوس $\overset{\frown}{أن'}$

يكون للعددين α و β نفس جيب التمام إذا وفقط إذا كانت للنقطتين ن و ن′ نفس الفاصلة وهذا يعني أن النقطتين ن و ن′ متطابقتان أو متناظرتان بالنسبة إلى (م أ)

ومنه النتيجة :

تجب α = تجب β $\Longleftrightarrow$ ($\alpha = \beta + 2\pi$ك ؛ ك ∈ ص
أو
$\alpha = -\beta + 2\pi$ك ؛ ك ∈ ص)

2.1 ـ حل المعادلة تجب س = تجب α :

نعتبر المعادلة تجب س = تجب α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى :

النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح **بحل المعادلة :**

تجب س = تجب α

تجب س = تجب α $\Longleftrightarrow$ (س = $\alpha + 2\pi$ك ، ك ∈ ص أو س = $-\alpha + 2\pi$ك ، ك ∈ ص)

أمثلة

1) حلول المعادلة $\text{تجب } \text{س} = \text{تجب } \frac{\pi}{3}$ هي الأعداد الحقيقية س

حيث :

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{3} + 2\pi\,\text{ك} \;.\; \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi\,\text{ك} \;.\; \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

2) لنعتبر المعادلة ذات المجهول س :

$$\text{تجب } 2\,\text{س} = \text{تجب}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (\text{م})$$

لدينا :

$$(\text{م}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\,\text{س} = \text{س} + \frac{\pi}{4} + 2\pi\,\text{ك} \;.\; \text{ك} \in \text{ص} \quad (1) \\ \text{أو} \\ 2\,\text{س} = -\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi\,\text{ك} \;.\; \text{ك} \in \text{ص} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Longleftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{4} + 2\pi\,\text{ك} \;.\; \text{ك} \in \text{ص}$$

$$(2) \Longleftrightarrow 3\,\text{س} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi\,\text{ك} \;.\; \text{ك} \in \text{ص}$$

$$(2) \Longleftrightarrow \text{س} = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi\,\text{ك}}{3} \;.\; \text{ك} \in \text{ص}$$

حلول المعادلة (م) هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{4} + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = -\frac{\pi}{12} + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

3) لنعتبر المعادلة ذات المجهول س :

$$\text{تجب}\left(\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{تجب}\left(\text{س} + \frac{\pi}{6}\right) \qquad (\text{م}')$$

لدينا :

$$(\text{م}') \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{س} - \frac{\pi}{3} = \text{س} + \frac{\pi}{6} + 2\pi\,\text{ك} \text{ . } \text{ك} \in \text{ص} \quad (3) \\ \text{أو} \\ \text{س} - \frac{\pi}{3} = -\left(\text{س} + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi\,\text{ك} \text{ . } \text{ك} \in \text{ص} \quad (4) \end{cases}$$

المعادلة (3) ليس لها حلّ

$$(4) \Longleftrightarrow 2\,\text{س} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi\,\text{ك} \text{ . } \text{ك} \in \text{ص}$$

$$\Longleftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{12} + \pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص}$$

إذن حلول المعادلة (م′) هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\text{س} = \frac{\pi}{12} + \pi\,\text{ك} \text{ . } \text{ك} \in \text{ص}$$

3.1 ـ حل المعادلة تجب س = ط :

ط عدد حقيقي و (ى) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم (م ، $\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$)
الأعداد الحقيقية س التي تحقق تجب س = ط هي أقياس الأقواس $\overset{\frown}{أ ن}$
بحيث تكون فاصلة ن هي ط

- إذا كان ط $\notin$ [− 1 ، 1] لا يوجد حل للمعادلة تجب س = ط
- إذا كان ط $\in$ [− 1 ، 1] توجد على الأقل نقطة ن من الدائرة (ى) فاصلتها ط

إذا كان α قيساً للقوس $\overset{\frown}{أ ن}$ فإن حل المعادلة تجب س = ط يؤول إلى حل المعادلة تجب س = تجب α

أمثلة :

1) نعتبر المعادلة تجب س $= \frac{1}{2}$

نعلم أن تجب $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

حلول المعادلة تجب س $= \frac{1}{2}$ هي حلول المعادلة

تجب س = تجب $\frac{\pi}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\left(س = \frac{\pi}{3} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \right)$$

أو

$$\left(س = -\frac{\pi}{3} + 2\pi ك \text{ } ك \in ص \right)$$

2) نعتبر المعادلة $1 + 2$ تجب س $= 0$

لدينا $1 + 2$ تجب س $= 0 \Leftrightarrow$ تجب س $= -\frac{1}{2}$

نعلم أن تجب $\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ لأن :

تجب $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -$ تجب $\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

حلول المعادلة $1 + 2$ تجب س $= 0$ هي حلول المعادلة

تجب س = تجب $\frac{2\pi}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث :

س $= \frac{2\pi}{3} + 2\pi$ك . ك $\in$ ص

أو

س $= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$ك . ك $\in$ ص

3) نعتبر المعادلة تجب س $= 1$

نعلم أن تجب $0 = 1$

تجب س $= 1 \Leftrightarrow$ تجب س = تجب 0

$\Leftrightarrow$ س $= 0 + 2\pi$ك . ك $\in$ ص

أو

س $= -0 + 2\pi$ك . ك $\in$ ص

$\Leftrightarrow$ س $= 2\pi$ك . ك $\in$ ص

حلول المعادلة تجب س $= 1$ هي الأعداد الحقيقية س حيث

س $= 2\pi$ك . ك $\in$ ص

4) نعتبر المعادلة تجب س = − 1

نعلم أن تجب π = − 1

تجب س = − 1 ⟸⟹ تجب س = تجب π

⟸⟹ س = π + 2 π ك ، ك ∋ ص
أو
س = − π + 2 π ك ، ك ∋ ص

⟸⟹ س = (2 ك + 1) π ، ك ∋ ص
أو
س = (2 ك − 1) π ، ك ∋ ص

العددان الصحيحان (2 ك − 1) و (2 ك + 1) فرديان وكيفيان

يمكن كتابتهما على شكل موحّد (2 ك′ + 1) ، ك′ ∋ ص

إذن :

حلول المعادلة تجب س = − 1 هي الأعداد الحقيقية

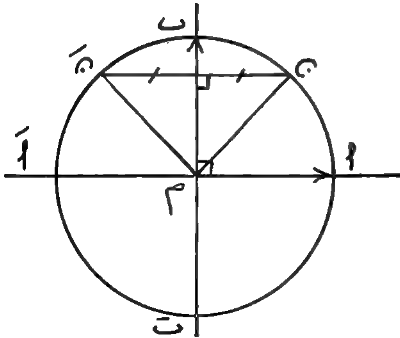
س حيث س = (2 ك′ + 1) π . ك′ ∋ ص

2 ـ المعادلات من الشكل جب س = جب α :

1.2 ـ الأعداد التي لها نفس الجيب :

α و β عددان حقيقيان ، ن و ن′ نقطتان من الدائرة المثلثية (ى) المرفقة بالمعلم (م ، م أ⃗ ، م ب⃗)

بحيث يكون α قيسا للقوس أن⌒ و β قيسا للقوس أن′⌒



يكون للعددين α و β نفس الجيب إذا وفقط إذا كان للنقطتين ن و ن′ نفس الترتيب وهذا يعني أن النقطتين ن و ن′ متطابقتان أو متناظرتان بالنسبة إلى (م ب) .

ومنه النتيجة :

$$\text{جب } \alpha = \text{جب } \beta \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi \text{ ك ، ك } \in \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi \text{ ك ، ك } \in \text{ ص} \end{array} \right)$$

2.2 ـ حل المعادلة جب س = جب α :

نعتبر المعادلة جب س = جب α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى. النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة جب س = جب α

$$\text{جب س} = \text{جب } \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{س} = \alpha + 2\pi \text{ ك ، ك } \in \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \pi - \alpha + 2\pi \text{ ك ، ك } \in \text{ ص} \end{array} \right.$$

أمثلة :

1) حلول المعادلة جب س = جب $\frac{\pi}{6}$ هي الأعداد الحقيقية س

حيث :

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \text{ ك ، ك } \in \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi \text{ ك ، ك } \in \text{ ص} \end{array} \right.$$

أي

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \text{ ك ؛ ك } \in \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \text{ ك ، ك } \in \text{ ص} \end{array} \right.$$

2) نعتبر المعادلة جب 2 س = جب $\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right)$ (م)

لدينا :

(م) ⟺
$$2\text{س} = \frac{\pi}{4} - \text{س} + 2\pi\text{ك} ، \text{ك} \in \text{ص}$$
أو
$$2\text{س} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right) + 2\pi\text{ك} ، \text{ك} \in \text{ص}$$

⟺
$$3\text{س} = \frac{\pi}{4} + 2\pi\text{ك} ، \text{ك} \in \text{ص}$$
أو
$$\text{س} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\text{ك} ، \text{ك} \in \text{ص}$$

⟺
$$\text{س} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\text{ك}}{3} ، \text{ك} \in \text{ص}$$
أو
$$\text{س} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\text{ك} ، \text{ك} \in \text{ص}$$

إذن حلول المعادلة جب 2 س = جب $\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right)$ هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\text{س} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\text{ك}}{3} ، \text{ك} \in \text{ص}$$
أو
$$\text{س} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\text{ك} ، \text{ك} \in \text{ص}$$

3) نعتبر المعادلة 2 جب^2 س − 7 جب س + 3 = 0 (1)

نضع جب س = ع ونحل الجملة

$$\begin{cases} ع = \text{جب س} \\ \text{و} \\ 2ع^2 - 7ع + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

للمعادلة (2) حلان 3 و $\frac{1}{2}$

من أجل ع = 3 نحصل على المعادلة جب س = 3 التي ليس لها حل ومن

أجل ع = $\frac{1}{2}$ نحصل على المعادلة جب س = $\frac{1}{2}$ والتي حلولها هي الأعداد

الحقيقية س حيث

$$\left[\begin{array}{l} س = \frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \frac{5\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{array}\right.$$

إذن حلول المعادلة (1) هي الأعداد الحقيقية س حيث:

$$\left[\begin{array}{l} س = \frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \frac{5\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{array}\right.$$

3.2 ـ حل المعادلة جب س = ط :

ط عدد حقيقي و (ى) الدائرة المثلثية

الأعداد الحقيقية س التي تحقق جب س = ط هي أقياس الأقواس $\overset{\frown}{أ ه}$ بحيث يكون ترتيب ه هو ط

- إذا كان ط ∉ [− 1 ، 1] لا يوجد حل للمعادلة جب س = ط
- إذا كان ط ∈ [− 1 ، 1] توجد على الأقل نقطة ه من الدائرة (ى) ترتيبها ط

إذا كان α قيسا للقوس $\overset{\frown}{أ ه}$ فإن حل المعادلة جب س = ط يؤول إلى حل المعادلة جب س = جب α

أمثلة :

1) نعتبر المعادلة جب س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

نعلم أن جب $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حلول المعادلة جب س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي حلول المعادلة

جب س = جب $\frac{\pi}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

س = $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك ، ك ∈ ص

أو

س = $\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك ، ك ∈ ص

أي :

$$\begin{cases} س = \frac{\pi}{3} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \frac{2\pi}{3} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{cases}$$

2) نعتبر المعادلة $1 + 2$ جب س $= 0$

لدينا $1 + 2$ جب س $= 0 \Leftrightarrow$ جب س $= -\frac{1}{2}$

نعلم أن جب $\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

حلول المعادلة $1 + 2$ جب س $= 0$ هي حلول المعادلة

جب س = جب $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\begin{cases} س = -\frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases} س = -\frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \frac{7\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ؛ } ك \in ص \end{cases}$$

3) نعتبر المعادلة جب س = 1

نعلم أن جب $\frac{\pi}{2} = 1$

جب س = 1 $\Leftrightarrow$ جب س = جب $\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$

س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص

أو

س = $\pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص

$\Leftrightarrow$

س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص

أو

س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص

$\Leftrightarrow$ س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ؛ ك $\in$ ص

حلول المعادلة جب س = 1 هي الأعداد الحقيقية

س حيث س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص

4) نعتبر المعادلة جب س = − 1 (1)

نعلم أن جب $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ = − 1

(1) ⟺ جب س = جب $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

⟺ س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∈ ص
أو
س = $\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi$ ك ، ك ∈ ص

⟺ س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ك (ك ∈ ص)
أو
س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$(ك + 1) (ك ∈ ص)

⟺ س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ك (ك ∈ ص)
أو
س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ك' (ك' ∈ ص)

بوضع ك + 1 = ك'

إذن :

حلول المعادلة جب س = − 1 هي الأعداد الحقيقية س حيث :

$$س = -\frac{\pi}{2} + 2\pi ك \quad (ك \in ص)$$

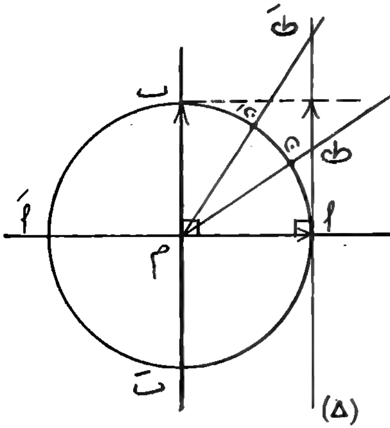
5) نعتبر المعادلة جب س = $\sqrt{2}$

لدينا $\sqrt{2} > 1$

إذن ليس للمعادلة جب س = $\sqrt{2}$ حل

3 ـ المعادلات من الشكل ظل س = ظل α

1.3 ـ الأعداد التي لها نفس الظل :



α و β عددان حقيقيان ، ه و ه َ

النقطتان من الدائرة المثلثية (ى)

بحيث يكون α قيسا للقوس أه و β

قيسا للقوس أه َ

نسمي ط نقطة تقاطع المستقيمين

(م ه) و (Δ) ، و ط َ نقطة

تقاطع المستقيمين (Δ) و (م ه َ)

يكون للعددين α و β نفس الظل إذا وفقط إذا كانت النقطتان ط و ط َ متطابقتين وهذا يعني أن النقطتين ه و ه َ متطابقتان أو متناظرتان بالنسبة إلى النقطة م.

فعندما تكون ه و ه َ متطابقتين

يكون $\alpha = \beta + 2\pi ك$ ، ك $\in$ ص (1)

وعندما تكون ه و ه َ متناظرتين بالنسبة إلى م

يكون $\alpha = \beta + \pi + 2\pi ك$ ، ك $\in$ ص

$= \beta + (2ك + 1)\pi$ ، ك $\in$ ص (2)

يمكن كتابة (1) و (2) على الشكل الموحد

$\alpha = \beta + $ كَ$' \pi$ ، كَ$' \in$ ص

لأن :

من أجل قيم كَ$'$ الزوجية نحصل على (1) ومن أجل قيم كَ$'$ الفردية نحصل على (2)

ومنه النتيجة :

ظل α = **ظل** $\beta \Longleftrightarrow \alpha = \beta +$ **ك** π ، **ك** $\in$ ص

2.3 ـ حل المعادلة ظل س = ظل α

نعتبر المعادلة ظل س = ظل α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى :

النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة ظل س = ظل α

ظل س = ظل $\alpha \Longleftrightarrow$ س $= \alpha +$ ك π ، ك $\in$ ص

أمثلة :

1) حلول المعادلة ظل س = ظل $\frac{\pi}{4}$ هي الأعداد الحقيقية س .

حيث س $= \frac{\pi}{4} +$ ك π ، ك $\in$ ص

2) نعتبر المعادلة ظل 3 س = ظل $\left(\frac{\pi}{3} - 2\right.$ س$\left.\right)$ (م)

لدينا :

(م) $\Longleftrightarrow$ 3 س $= \frac{\pi}{3} - 2$ س $+$ ك π ، ك $\in$ ص

$\Longleftrightarrow$ 5 س $= \frac{\pi}{3} +$ ك π ، ك $\in$ ص

$\Longleftrightarrow$ س $= \frac{\pi}{15} + \frac{\text{ك}\,\pi}{5}$ ، ك $\in$ ص

إذن حلول المعادلة ظل 3 س = ظل $\left(\frac{\pi}{3} - 2\right.$ س$\left.\right)$

هي الأعداد الحقيقية س حيث

س = $\frac{\pi}{15} + \frac{\text{ك}\,\pi}{5}$ ، ك ∋ ص

3.3 ـ حل المعادلة ظل س = ط

مهما يكن العدد الحقيقي ط يوجد ، على الأقل ، عدد حقيقي α بحيث يكون ظل α = ط

وحل المعادلة ظل س = ط يؤول إلى حل المعادلة ظل س = ظل α

أمثلة :

1) نعتبر المعادلة ظل س = 1

نعلم أن ظل $\frac{\pi}{4}$ = 1

حلول المعادلة ظل س = 1 هي حلول المعادلة

ظل س = ظل $\frac{\pi}{4}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

س = $\frac{\pi}{4}$ + ك π ، ك ∋ ص

2) نعتبر المعادلة ظل $\frac{\text{س}}{2}$ = $\sqrt{3}$

نعلم أن ظل $\frac{\pi}{3}$ = $\sqrt{3}$

$$\text{ظل}\,\frac{\text{س}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{ظل}\,\frac{\text{س}}{2} = \text{ظل}\,\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{س}}{2} = \frac{\pi}{3} + \text{ك}\,\pi \text{ ، ك} \in \text{ص}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,\pi\,\text{ك ، ك} \in \text{ص}$$

حلول المعادلة $\text{ظل}\,\frac{\text{س}}{2} = \sqrt{3}$ هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\text{س} = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,\pi\,\text{ك ، ك} \in \text{ص}$$

3) نعتبر المعادلة ظل 2 س = تظل س

نعلم أن تظل س = ظل $\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$

$$\text{ظل 2 س} = \text{تظل س} \Leftrightarrow \text{ظل 2 س} = \text{ظل}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{س} = \frac{\pi}{2} - \text{س} + \text{ك}\,\pi \text{ ، ك} \in \text{ص}$$

$$\Leftrightarrow 3\,\text{س} = \frac{\pi}{2} + \text{ك}\,\pi \text{ ، ك} \in \text{ص}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{6} + \frac{\text{ك}\,\pi}{3} \text{ ، ك} \in \text{ص}$$

حلول المعادلة ظل 2 س = تظل س هي الأعداد الحقيقية س

حيث : $\text{س} = \frac{\pi}{6} + \frac{\text{ك}\,\pi}{3} \text{ ، ك} \in \text{ص}$

تمـارين

الزوايا الهندسية :

1. الأقياس α ، β ، γ لزوايا مثلث متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 ، 2 ، 3 .
   1) أُحسب هذه الأقياس بالدرجات وبالغرادات وبالراديانات
   2) ما هي طبيعة هذا المثلث ؟

2. نفس الأسئلة إذا كانت α ، β ، γ متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 ، 1 ، 2 .

3. نفس الأسئلة إذا كانت α ، β ، γ متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 ، 2 ، 2 :

4. أُحسب ، بالراديانات ، ثم بالغرادات ، أقياس الزوايا التي أقياسها : $10°$ ؛ $18°$ ؛ $53°$ ؛ $1°$ ؛ $135°$ ؛ $200°$.

5. أُحسب ، بالدرجات ، ثم بالغرادات ، أقياس الزوايا التي أقياسها :

$\frac{\pi}{5}$ رد ؛ $\frac{2\pi}{5}$ رد ؛ $\frac{3\pi}{5}$ رد ؛ $\frac{5\pi}{4}$ رد ؛ $\frac{3\pi}{8}$ رد .

6. 1) عبّر ، بالدرجات وبالغرادات ، عن الأقياس :

$\frac{\pi}{20}$ رد ؛ $\frac{7\pi}{6}$ رد ؛ $\frac{13\pi}{5}$ رد ؛ 0,3 رد ؛ 15,8 رد .

2) حوّل إلى الدرجات والراديانات الأقياس :

150 غر ؛ 25 غر ؛ 47,8 غر ؛ 1230 غر

3) حوّل إلى الراديانات والغرادات الأقياس :

$36°$ ؛ $345°$ ؛ $15°$ ؛ $702°$

7. أُحسب ، بالراديانات وبالغرادات وبالدرجات الزاوية المحصورة بين عقربي ساعة عندما تشير هذه الساعة إلى :

- الساعة 12 و 30 د
- الساعة 1 و 20 د
- الساعة 2 و 55 د

8. ا ب حـ مثلث حيث : $\widehat{ب ا حـ} = 35°$ و $\widehat{ا ب حـ} = 80°$.
أُحسب $\widehat{ب حـ ا}$ وقيس زاوية المنصفين للزاويتين
[ب ا ، ب حـ] و [حـ ا ، حـ ب]

9. ا ب حـ مثلث . هـ نقطة تقاطع أعمدته .
أُحسب $\widehat{ب هـ حـ}$ بدلالة $\widehat{ب ا حـ}$.

10. قيس قوس دائرة هو 50° وطول هذه القوس 3 π سم .
ما هو نصف قطر هذه الدائرة ؟

11. دائرة (ى) نصف قطرها 2 سم . ا و ب نقطتان من (ى) .
إذا كان طول القوس $\overset{\frown}{ا ب}$ يساوي 1 سم ، ما هو طول القوس $\overset{\frown}{ا ب}$ ؟

12. دائرة (ى) طولها 24 سم . ا و ب نقطتان من (ى) حيث طول القوس $\overset{\frown}{ا ب}$ يساوي 9 سم .
ما هو قيس هذه القوس بالراديانات وبالدرجات ؟

13. لولب خطوته 2 مم (أي عندما يدور هذا اللولب دورة كاملة ، ينغرز بعمق قدره 2 مم) .
1) بكم ينغرز هذا اللولب إذا دار بزاوية قدرها 63900° ؟
2) ما هي الزاوية التي يدورها هذا اللولب إذا انغرز بعمق قدره 23 مم ؟

الأقواس الموجهة :

14. ا ب حـ مثلث متقايس الأضلاع و (ى) دائرة موجهة محيطة به . الاتجاه الموجب على (ى) هو الاتجاه من ا نحو ب .
عيّن قيسا مقدراً بالراديانات لكل من القوسين $\overset{\frown}{ا ب}$ و $\overset{\frown}{ا حـ}$.

15. ا ب حـ ى مربع و (ى) دائرة موجهة محيطة به :
الاتجاه السالب على (ى) هو الاتجاه من ا نحو ب .
عيّن قيساً مقدراً بالراديانات لكل واحدة من الأقواس $\overset{\frown}{اب}$ ، $\overset{\frown}{احـ}$ ، $\overset{\frown}{اى}$.

16. (ى) دائرة موجهة و ٯ نقطة من (ى) .
عيّن النقط ا ، ب ، حـ ، ك ، ل ، م ، هـ من الدائرة (ى) بحيث تكون الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ ، $-\frac{3\pi}{4}$ ، $-\frac{\pi}{4}$ أقياسا ، على الترتيب ، للأقواس $\overset{\frown}{ٯا}$ ، $\overset{\frown}{ٯب}$ ، $\overset{\frown}{ٯحـ}$ ، $\overset{\frown}{ٯك}$ ، $\overset{\frown}{ٯل}$ ، $\overset{\frown}{ٯم}$ ، $\overset{\frown}{ٯهـ}$.
ما هي النقط المتقابلة قطرياً ؟

17. ا ب حـ ى ف ك ل م ٯ هـ و ى مضلع منتظم و (٧) دائرة موجهة محيطة به (الشكل) .
عيّن قيسا مقدراً بالراديانات لكل قوس من الأقواس التالية :
$\overset{\frown}{اى}$ ، $\overset{\frown}{اك}$ ، $\overset{\frown}{بٯ}$ ، $\overset{\frown}{ىهـ}$ ، $\overset{\frown}{ٯهـ}$ ، $\overset{\frown}{كب}$.

18. عيّن الأقياس الرئيسية للأقواس الموجهة التي أقياسها هي : 637π ر د ؛ $-\frac{239\pi}{6}$ ر د ؛ $-\frac{227\pi}{7}$ ر د ؛ $1650°$ ؛ $-4857''$

19. عيّن الأقياس الرئيسية للأقواس الموجهة التي أقياسها هي : $\frac{15\pi}{2}$ ر د ؛
$\frac{172\pi}{3}$ ر د ؛ $-\frac{57\pi}{4}$ ر د ؛ 128π ر د ؛ $\frac{4\pi}{3}$ ر د ؛ 125π ر د ؛
$-\frac{2\pi}{3}$ ر د ؛ $-\frac{11\pi}{6}$ ر د ؛ $\frac{5\pi}{2}$ ر د ؛ $10^5\pi$ ر د ؛ $-\frac{5\pi}{6}$ ر د ؛
$-\frac{28\pi}{3}$ ر د ؛ $\frac{167\pi}{5}$ ر د ؛ $\frac{110\pi}{4}$ ر د .

20. القيس الرئيسي لقوس موجهة هو 2 ر د .

1) أثبت أنه يوجد قيس وحيد α لهذه القوس حيث

$\alpha \in] 49 ; 49 + 2\pi]$

2) أثبت أنه يوجد قيس وحيد β لهذه القوس حيث

$\beta \in [-39 ; -39 + 2\pi [$

21. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من دائرة موجهة ؛ α و β قيسان للقوسين $\overset{\frown}{اب}$ و $\overset{\frown}{بحـ}$ على الترتيب .

عيّن قيس القوس $\overset{\frown}{احـ}$ الذي ينتمي إلى المجال $[0 ، 2\pi[$ في كل حالة من الحالات التالية :

$\alpha = \frac{4\pi}{3}$ و $\beta = -\frac{5\pi}{6}$

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$ و $\beta = \frac{3\pi}{2}$

$\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ و $\beta = -\frac{3\pi}{4}$

$\alpha = \frac{50\pi}{3}$ و $\beta = \frac{7\pi}{4}$

22. (ى) دائرة موجهة نصف قطرها 4 سم .

ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من (ى) بحيث يكون العددان $\frac{2\pi}{3}$ و $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ قيسين ، على الترتيب ، للقوسين $\overset{\frown}{اب}$ و $\overset{\frown}{احـ}$.

1) عيّن القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{بحـ}$.

2) أحسب طولي القوسين $\overset{\frown}{بحـ}$ و $\overset{\frown}{بحـ}$.

23. (γ) دائرة مثلثية و أ نقطة منها .
عيّن النقطتين ﻫ و ﻫ' بحيث يكون العددان 1560 و ($-$ 2025) قيسين ، بالدرجات ، للقوسين $\overset{\frown}{\text{أﻫ}}$ و $\overset{\frown}{\text{أﻫ'}}$ ، على الترتيب .
أحسب ، بالراديانات ، القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{\text{ﻫﻫ'}}$.

24. (γ) دائرة مثلثية نصف قطرها 5 سم .
تتحرك نقطة ﻫ على الدائرة (γ) ، في الاتجاه الموجب ، منطلقة من أ ومستقرة عند ب .
عيّن القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ إذا قطعت النقطة ﻫ مسافة قدرها 12 سم .

الزوايا الموجهة لنصفي مستقيمين :

25. [م س) نصف مستقيم من المستوي الموجه .
1) ارسم أنصاف المستقيمات [م ع) ؛ [م ص) ؛ [م ف) بحيث يكون :
$\overline{(\text{م س ، م ع})} = \frac{\pi}{4}$ ؛ $\overline{(\text{م س ، م ص})} = \frac{7\pi}{6}$ ؛
$\overline{(\text{م س ، م ف})} = -\frac{\pi}{6}$
2) أحسب القيس الرئيسي لكل من الزوايا التالية :
$\overline{(\text{م ع ، م ص})}$ ؛ $\overline{(\text{م ص ، م ف})}$ ؛ $\overline{(\text{م ف ، م ع})}$

26. نفس التمرين علما أن : $\overline{(\text{م س ، م ع})} = \frac{\pi}{3}$ ؛
$\overline{(\text{م س ، م ص})} = -\frac{3\pi}{4}$ ؛ $\overline{(\text{م س ، م ف})} = \frac{2\pi}{3}$.

27. (س' س) و (ع' ع) مستقيمان متقاطعان في النقطة م .
1) أحسب $\overline{(\text{م س ، م ع})} + \overline{(\text{م ع ، م س'})}$
و $\overline{(\text{م ع ، م س'})} + \overline{(\text{م س' ، م ع'})}$
2) استنتج المساواة :
$\overline{(\text{م س ، م ع})} = \overline{(\text{م س' ، م ع'})} + 2\pi$ ك (ك ∈ ص)

28. [م س) محور قطبي للمستوي الموجه .

[م ص) و [م ص′) نصفا مستقيمين ، θ و θ' زاويتاهما القطبيتان ، على الترتيب ، بالنسبة إلى [م س) .

[م ع) و [م ع′) نصفا مستقيمين حيث :

(م ص ، م ع) = (م ع ، م ع′) = (م ع′ ، م ص′)

أُحسب أقياس الزوايا القطبية لنصفي المستقيمين [م ع) ، [م ع′) بالنسبة إلى [م س) .

الزوايا الموجهة لشعاعين :

29. ا ب حـ ء مربع حيث $(\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{اء}}) = -\frac{\pi}{2}$.

[م س) محور قطبي للمستوي الموجه و α قيس الزاوية القطبية لنصف المستقيم [ا ب) .

أُحسب أقياس الزوايا القطبية لأنصاف المستقيمات [ب حـ) ؛ [حـ ء) ؛ [حـ ا) بالنسبة إلى [م س) .

30. ا ب حـ مثلث .

1) أُحسب م = $(\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{احـ}}) + (\overrightarrow{\text{حـا}} ، \overrightarrow{\text{حـب}}) + (\overrightarrow{\text{بحـ}} ، \overrightarrow{\text{با}})$

2) أثبت أن :

$$(\overrightarrow{\text{بحـ}} ، \overrightarrow{\text{حـا}}) = (\overrightarrow{\text{بحـ}} ، \overrightarrow{\text{با}}) + (\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{احـ}}) + 2\pi \text{ك}$$

(ك ∈ ص)

31. ارسم المثلث ا ب حـ علما أن :

احـ = 8 سم ؛ $(\overrightarrow{\text{احـ}} ، \overrightarrow{\text{اب}}) = \frac{\pi}{4}$ ؛ $(\overrightarrow{\text{حـا}} ، \overrightarrow{\text{حـب}}) = -\frac{\pi}{3}$

أُحسب $(\overrightarrow{\text{با}} ، \overrightarrow{\text{بحـ}})$.

تأكد من هذه النتيجة باستعمال الشكل .

32. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين حيث ا ب = ا حـ

أُحسب $(\overrightarrow{\text{حـا}} ، \overrightarrow{\text{حـب}})$ بدلالة $(\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{احـ}})$

تطبيق : ارسم المثلث ا ب حـ علما أن :

ا ب = ا حـ ؛ ب حـ = 6 سم ؛ $(\overrightarrow{\text{اب}} ، \overrightarrow{\text{احـ}}) = \frac{2\pi}{3}$

33. اب ح مثلث ؛ ى نقطة من القطعة [ب ح] حيث :

$ب ا = ب ى$ ؛ $ى ا = ى ح$ ؛ $(\overrightarrow{ب ح}، \overrightarrow{ب ا}) = \frac{\pi}{4}$.

أُحسب $(\overrightarrow{اب}، \overrightarrow{اح})$ و $(\overrightarrow{حب}، \overrightarrow{حا})$.

34. اب ح مثلث من المستوي الموجه حيث :

$اب = \alpha$ ؛ $ب ح = \beta$ ؛ $(\overrightarrow{ب ا}، \overrightarrow{ب ح}) = -\frac{3\pi}{4}$.

ى نقطة من المستوي . نضع : $ح ى = \gamma$ و $(\overrightarrow{حب}، \overrightarrow{ح ى}) = \theta$.

عيّن γ و θ لكي يكون الرباعي اب ح ى متوازي أضلاع .

هل يمكن أن يكون الرباعي اب ح ى معيّنا ؟

الزوايا الموجهة لمستقيمين :

35. (ق) و (Δ) مستقيمان من المستوي الموجه .

(ق′) و (Δ′) مستقيمان عموديان ، على الترتيب على (ق) و (Δ) .

أثبت أن : $(\overline{ق′، Δ′}) = (\overline{ق، Δ}) + ك\pi$ (ك ∋ ص)

36. (γ) و (γ') دائرتان مركزاهما م و م′ على الترتيب ، متقاطعتان في النقطتين ا ، ب .

(Δ) المماس للدائرة (γ) في ا ، (Δ′) المماس للدائرة (γ') في ا .

أثبت أن : $(\overline{Δ، Δ′}) = (\overline{ام، ام′}) + ك\pi$ (ك ∋ ص)

37. اب ح مثلث قائم في ا ؛ ﻫ المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح)

أثبت أن : $(\overline{اﻫ، اب}) = (\overline{حب، حا}) + ك\pi$ (ك ∋ ص)

العلاقات المثلثية الأساسية :

38. س عدد حقيقي ، أثبت أن

1) $(جب س + تجب س)^2 = 1 + 2$ جب س تجب س

2) $(جب س - تجب س)^2 = 1 - 2$ جب س تجب س

3) $(جب س + تجب س)^2 + (جب س - تجب س)^2 = 2$

4) $جب^4 س - تجب^4 س = جب^2 س - تجب^2 س$

39. س عدد حقيقي ، بسط ما يلي:

1) ظل س تجب س

2) جب^{3} س + جب س تجب^{2} س

3) $\frac{1}{\text{تجب}^{2}\,\text{س}} - 1$

4) جب^{4} س − تجب^{4} س

40. س عدد حقيقي ، أثبت أن :

1) $1 + \frac{\text{جب}^{2}\,\text{س}}{\text{تجب}^{2}\,\text{س}} = \frac{1}{\text{تجب}^{2}\,\text{س}}$

2) $1 + \frac{\text{تجب}^{2}\,\text{س}}{\text{جب}^{2}\,\text{س}} = \frac{1}{\text{جب}^{2}\,\text{س}}$

3) $\frac{1 - \text{تجب}\,\text{س}}{\text{جب}\,\text{س}} = \frac{\text{جب}\,\text{س}}{1 + \text{تجب}\,\text{س}}$

4) $\frac{1 - \text{جب}\,\text{س}}{\text{تجب}\,\text{س}} = \frac{\text{تجب}\,\text{س}}{1 + \text{جب}\,\text{س}}$

41. أُحسب تجب س و جب س إذا كان $\pi <$ س $< \frac{3\pi}{2}$ وظل س $= 2$

42. أُحسب تجب س وجب س إذا كان $\frac{\pi}{2} <$ س $< \pi$ وظل س $= -\frac{1}{3}$

43. أُحسب جب س وظل س علما أن $-\frac{\pi}{2} <$ س < 0 وتجب س $= -0{,}3$

44. أُحسب تجب س وظل س إذا كان $\frac{3\pi}{2} <$ س $< 2\pi$ وجب س $= -0{,}6$

45. أثبت أن : ($1 + \text{ظل}^{2}$ س $= 1 + \text{ظل}^{2}$ ع) ⇐ (تجب^{2} ع $= \text{تجب}^{2}$ س)

46. س عدد حقيقي حيث $0 \leqslant$ س $< \frac{\pi}{2}$

1) أثبت أن $\text{تجب}^{2}\,\text{س} = \frac{1}{1 + \text{ظل}^{2}\,\text{س}}$

2) أُحسب جب س وتجب س علما أن ظل س $= 1{,}5$

48. س وَ ع قيسان ، بالراديان ، لزاويتين

أثبت أن : $\left(س + ع = \frac{\pi}{2} \right)$ ⟸ $\left(\begin{array}{c} تجب^2 س + تجب^2 ع = 1 \\ وَ \\ جب^2 س + جب^2 ع = 1 \end{array} \right)$

49. س و ع قيسان ، بالراديان لزاويتين

أثبت أن : $(س + ع = \pi)$ ⟸ $\left(\begin{array}{c} تجب^2 س + جب^2 ع = 1 \\ وَ \\ جب^2 س + تجب^2 ع = 1 \end{array} \right)$

50. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين رأسه ا

نسمي ك المسقط العمودي للنقطة ا على المستقيم (ب حـ)

و ل المسقط العمودي للنقطة ب على المستقيم (ا حـ)

1) أثبت أن : $\widehat{ب ا ك} = \widehat{حـ ب ل}$

2) نضع ا ب = ط .

α قيس ، بالراديان للزاوية [ا ب ، ا ك] حيث $\alpha \in \left] 0 , \frac{\pi}{4} \right[$.

أثبت أن : ب حـ = 2 ط جب α ؛ ب ل = ط جب 2 α ؛ $\frac{ب ل}{ب حـ}$ = تجب

أستنتج أن :

جب 2 α = 2 جب α تجب α

51. (ى) دائرة مركزها م ونصف قطرها نق

ا وَ ب نقطتان متقابلتان قطريا في الدائرة (ى) و هـ نقطة من (ى) تختلف ء ا وَ ب

α قيس ، بالراديان ، للزاوية [ا هـ ، ا ب]

1) أُحسب المسافتين هـ ا وَ هـ ب بدلالة α و نق

2) نسمي هـ' نقطة تقاطع المستقيم (ا هـ) وَ المماس في النقطة ب للدائرة (ى)

أحسب المسافات هـ' ا ، هـ ا ، هـ' ب ، هـ هـ' بدلالة α و نق

3) أُدرس الحالات الخاصة التالية :

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{3}$

52. اب ح مثلث قائم في الزاوية ا و $\widehat{\text{ا ب ح}} = 60°$

1) أحسب $\widehat{\text{ا ح ب}}$ ، بالدرجات

2) ب′ هي نظيرة النقطة ب بالنسبة إلى النقطة ا

ما هي طبيعة المثلث ب ح ب′

3) نضع ب ح = ط ؛ ا ح = ك ؛ اب = ل

- أحسب اب وَ ا ح بدلالة ط
- أحسب اب و ب ح بدلالة ك
- أحسب ا ح و ب ح بدلالة ل

53. اب ح مثلث متساوي الساقين حيث اب = ا ح

ا′ المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) وَ ب′ المسقط العمودي للنقطة ب على (ا ح)

نضع : اب = ط وَ $\widehat{\text{ب ا ح}} = 2\alpha$

1) أحسب الأطوال ب ح ؛ ا ا′ ؛ ب ب′ ؛ ا ب′ ؛ ب′ ح بدلالة العددين ط و α

2) بالتعبير عن الطول ب ح بطريقتين مختلفتين

أثبت أن : جب 2α = 2 جب α تجب α

3) بالتعبير عن الطول ا′ ح بطريقتين مختلفتين

أثبت أن : تجب 2α = 1 − 2 جب^2 α

وَ تجب 2α = تجب^2 α − جب^2 α

54. عبّر عن الاعداد الحقيقية التالية بواسطة جب س ، تجب س، ظل س ، تظل س

1) تجب $\left(\frac{3\pi}{2} + \text{س}\right)$

7) جب $\left(\frac{5\pi}{2} - \text{س}\right)$

2) تجب $\left(\text{س} + 7\pi\right)$

8) جب $\left(\text{س} + \frac{5\pi}{2}\right)$

3) تجب $\left(\text{س} - \frac{7\pi}{2}\right)$

9) ظل $\left(5\pi - \text{س}\right)$

4) تجب $\left(\text{س} + \frac{5\pi}{2}\right)$

5) جب $\left(\text{س} - \frac{3\pi}{2}\right)$

6) جب $\left(\text{س} - 9\pi\right)$

10) ظل $\left(\text{س} + \frac{3\pi}{2}\right)$

11) ظل $\left(\text{س} - \frac{9\pi}{2}\right)$

12) ظل $\left(\text{س} + 3\pi\right)$

55. α عدد حقيقي . أُحسب المجاميع التالية :

1) تجب $(\pi+\alpha)$ + تجب $(\alpha+2\pi)$ + تجب $(\pi-\alpha)$ + تجب $(\alpha-3\pi)$

2) تجب $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ + جب $(\pi-\alpha)$ + جب $(\pi+\alpha)$

3) جب $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ + تجب $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ + جب $(3\pi+\alpha)$

− تجب $(7\pi-\alpha)$

4) ظل $(\pi-\alpha)$ + ظل $(\alpha+\pi)$ + ظل $(2\pi-\alpha)$ + ظل $\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$

5) ظل $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ + ظل $\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$ + ظل $\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ + ظل $\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$

56. س عدد حقيقي ، بسط المجاميع التالية :

1) 2 تجب^2 $(-\text{س})$ + تجب $(-\text{س})$ + 1

2) جب^2 $(\pi-\text{س})$ − 2 جب $(\pi-\text{س})$ + 3

3) جب^3 $\left(\frac{\pi}{2}-\text{س}\right)$ + تجب^3 $\left(\frac{\pi}{2}-\text{س}\right)$ − تجب س − جب س

4) تجب $\left[2\left(\text{س}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$ + جب $\left[2\left(\text{س}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

المعادلات المثلثية الأساسية :

57. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) $\text{تجب}\ \text{س} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\text{تجب}\left(2\text{س} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = 0$

3) $4\ \text{تجب}^2\ \text{س} + 1 = 0$

4) $4\ \text{تجب}^2\ \text{س} - 1 = 0$

5) $2\ \text{تجب}\left(3\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

6) $\text{تجب}\ 2\text{س} = \text{تجب}\ \frac{\pi}{4}$

7) $\text{تجب}^2\ \text{س} = 1$

8) $\text{تجب}\ 2\text{س} + 1 = 0$

9) $\text{تجب}\ 3\text{س} = \text{تجب}\left(\frac{\pi}{7} - \text{س}\right)$

10) $\text{تجب}\ 5\text{س} = \text{تجب}\left(\frac{2\pi}{3} - \text{س}\right)$

11) $\text{تجب}\left(3\text{س} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{تجب}\left(2\text{س} + \frac{\pi}{3}\right)$

58. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) $\text{جب}\ \text{س} = \frac{1}{2}$

2) $\text{جب}\ 5\text{س} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $2\ \text{جب}^2\ \text{س} + 3 = 0$

4) $2\ \text{جب}^2\ \text{س} - 3 = 0$

5) 4 جب^2 س $- 1 = 0$

6) جب 3 س $= 1$

7) 2 جب س $+ 2 = 0$

8) 2 جب $\left(\frac{\pi}{3} - \text{س}\right) = \sqrt{3}$

9) جب 2 س $=$ جب $\left(\frac{\pi}{3} - \text{س}\right)$

10) جب $\left(\text{س} + \frac{\pi}{3}\right) =$ جب $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

11) جب $\left(2\,\text{س} + \frac{\pi}{3}\right) =$ جب $\left(\frac{2\pi}{3} - \text{س}\right)$

59. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) ظل س $=$ ظل $\frac{\pi}{6}$

2) ظل س $= 1$

3) ظل^2 س $- 3 = 0$

4) ظل $\left(2\,\text{س} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

5) ظل $\left(\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

6) ظل 3 س $=$ ظل $\left(\frac{\pi}{3} - 2\,\text{س}\right)$

7) ظل 3 س $=$ ظل $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

8) ظل $\left(\frac{\text{س}}{3} + \frac{\pi}{4}\right) =$ ظل $\left(\frac{\text{س}}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$

60. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) 2 جب^2 س − 3 جب س + 1 = 0

2) 2 تجب^2 س − 7 تجب س + 3 = 0

3) 4 جب^2 س − 2 (1 − $\sqrt{3}$) جب س − $\sqrt{3}$ = 0

4) ظل^2 س + ($\sqrt{3}$ + 1) ظل س + $\sqrt{3}$ = 0

5) 2 تجب^2 2 س − 3 تجب 2 س + 1 = 0

61. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) تجب $\left(6\text{ س} + \frac{\pi}{3}\right)$ = تجب $\left(2\text{ س} - \frac{\pi}{6}\right)$ وَ $0 \leqslant$ س $\leqslant 2\pi$

2) جب س = جب $\frac{3\pi}{10}$ وَ تجب س < 0

3) جب 2 س = جب $\left(\frac{\pi}{2} - 3\text{ س}\right)$ وَ $-\pi <$ س $< 3\pi$

4) تجب 2 س = − تجب س وَ $0 \leqslant$ س $< 2\pi$

الباب الثامن

الدوال العددية

28 ـ عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي

29 ـ الدالة التآلفية

30 ـ الدالة $س \mapsto أ س^{2} + ب س + ح$ $(أ \neq 0)$

31 ـ الدالة $س \mapsto \frac{أ}{س}$ $(أ \neq 0)$

لقد قدّمت في السنة السابقة بعض المفاهيم الأوّلية المتعلقة بالدوال العددية (مجموعة التعريف ، التغيرات ، التمثيل البياني لتطبيق تآلفي ...) في هذه السنة ، تعمّم هذه المفاهيم وتدعّم بتتمات تمكّن التلاميذ من دراسة كاملة لدوال عددية أخرى : $س \mapsto أ س^{2} + ب س + ح$

و $س \mapsto \frac{أ}{س}$ $(أ \neq 0)$.

وتطبيقاً لما ورد في البرنامج فإن مفهومي النهاية والمستقيم المقارب قد تمّ استخراجهما انطلاقاً من أمثلة بسيطة .

28 عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي

1 ـ الدوال العددية لمتغير حقيقي :

تعريف

تسمى كل دالة لمجموعةالأعداد الحقيقية ح في نفسها دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت تا دالة عددية للمتغير الحقيقي س فإن العنصر تا (س) يسمى صورة العنصر س بالدالة تا

العنصر س يسمى سابقة للعنصر تا (س)

مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة عناصر المجموعة ح التي لها صورة في ح بالدالة تا

أمثلة :

1) الدالة تا : ح ⟵ ح

س ⟼ 3 س^2

هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح

ف$_{تا}$ = ح =] − ∞ ، + ∞ [

2) الدالة ها : ح ← ح

س ⟼ $\frac{1}{س - 1}$ هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح باستثناء 1

ف$_{ها}$ = ح − { 1 } =] − ∞ ، 1 [∪] 1 ، + ∞ [

3) الدالة عا : ح ← ح

س ↦ $\sqrt{2 - س}$

هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س

تكون هذه الدالة معرفة إذا وفقط إذا كان 2 − س ⩾ 0

ف$_{عا}$ =]− ∞ ، 2 [

4) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي تجب س هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س وتسمى الدالة جيب تمام

تجب : ح ← ح

س ↦ تجب س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح

5) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي جب س هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س وَ تسمى الدالة الجيب

جب : ح ← ح

س ↦ جب س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح

6) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي ظل س هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س وتسمى الدالة الظل

ظل : ح ← ح

س ↦ ظل س

نعلم أن ظل س معرف إذا وفقط إذا كان تجب س ≠ 0

تجب س = 0 ⟺ تجب س = تجب $\frac{\pi}{2}$

⟺ س = $\frac{\pi}{2} + \pi$ ك ، (ك ∈ ص)

إذن مجموعة تعريف الدالة الظل هي المجموعة ح باستثناء الأعداد الحقيقية

من الشكل $\frac{\pi}{2} + \pi$ ك ، (ك ∈ ص)

2 ـ اتجاه تغير دالة على مجال

1.2 ـ تعاريف :

لقد رأينا في السنة السابقة ما يلي :

إذا اعتبرنا ، مثلا ، الدالة تا : س ↦ 3 س

وأخذنا عددين كيفيين $س_1$ و $س_2$ فإن العددين تا ($س_1$) وَ تا ($س_2$) مرتبان في نفس الترتيب بالنسبة لترتيب العددين $س_1$ وَ $س_2$ وَقلنا إن الدالة تا متزايدة تماما على ح .

وإذا اعتبرنا الدالة ها : س ↦ − 2 س وَأخذنا عددين كيفيين $س_1$ و س فإن العددين ها ($س_1$) وَ ها ($س_2$) مرتبان في الترتيب العكسي بالنسبة لترتيب العددين $س_1$ وَ $س_2$ وقلنا إن الدالة ها متناقصة تماما على ح

وبصورة عامة يمكن إعطاء التعاريف التالية :

تا دالة عددية معرفة على مجال ل .

تعريف 1 :

تكون تا متزايدة تماما على ل إذا وَفقط إذا تحقق ما يلي

∀ $س_1$ ∈ ل ، ∀ $س_2$ ∈ ل : $س_1$ < $س_2$ ⇐ تا ($س_1$) < تا ($س_2$)

تعريف 2 :

تكون تا متزايدة على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

∀ $س_1$ ∈ ل ، ∀ $س_2$ ∈ ل : $س_1$ < $س_2$ ⇐ تا ($س_1$) ⩽ تا ($س_2$)

تعريف 3 :

تكون تا متناقصة تماما على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

∀ $س_1$ ∈ ل ، ∀ $س_2$ ∈ ل : $س_1$ < $س_2$ ⇐ تا ($س_1$) > تا ($س_2$)

تعريف 4 :

تكون تا متناقصة على ل إذا وَفقط إذا تحقق ما يلي

$\forall$ س$_1$ $\in$ ل ، $\forall$ س$_2$ $\in$ ل : س$_1$ $<$ س$_2$ $\Leftarrow$ تا (س$_1$) $\geqslant$ تا (س$_2$)

تعريف 5 :

تكون تا ثابتة على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

$\forall$ س$_1$ $\in$ ل ، $\forall$ س$_2$ $\in$ ل : تا (س$_1$) $=$ تا (س$_2$)

إذا كانت الدالة تا إما متناقصة وإما متزايدة على ل نقول إنها رتيبة على ل

أمثلة :

1) الدالة العددية تا : س $\mapsto$ س^2 متزايدة تماما على المجال [0 ، $+\infty$ [

لأن : 0 $\leqslant$ س$_1$ $<$ س$_2$ $\Leftarrow$ س$_1^2$ $<$ س$_2^2$

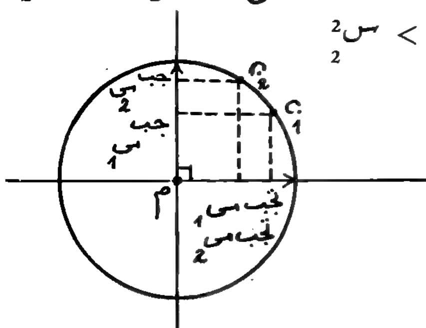
2) الدالة العددية تا : س $\mapsto$ س^2 متناقصة تماماً على المجال] $-\infty$ ، 0]

لأن : س$_1$ $<$ س$_2$ $\leqslant$ 0 $\Leftarrow$ س$_1^2$ $>$ س$_2^2$

3) نعتبر الدالتين العدديتين

س $\mapsto$ جب س

س $\mapsto$ تجب س



باستعمال الدائرة المثلثية نلاحظ

أنه إذا كان : 0 $\leqslant$ س$_1$ $<$ س$_2$ $\leqslant \frac{\pi}{2}$ فإن جب س$_1$ $<$ جب س$_2$

وَإذا كان : 0 $\leqslant$ س$_1$ $<$ س$_2$ $\leqslant \frac{\pi}{2}$ فإن تجب س$_1$ $>$ تجب س$_2$

الدالة الجيب متزايدة تماما على [0 ، $\frac{\pi}{2}$] والدالة الجيب تمام متناقصة تماما

على [0 ، $\frac{\pi}{2}$]

2.2 ـ نسبة تزايد دالة

إذا كانت دالة عددية تا متزايدة على مجال ل فإن النسبة $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2}$ تكون موجبة مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$ وإذا كانت تا متناقصة على ل فإن النسبة $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2}$ تكون سالبة مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ وَ $س_2$

تعريف :

> تسمى النسبة $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2}$ نسبة تزايد الدالة تا بين العددين الحقيقين المختلفين $س_1$ وَ $س_2$

من هذا التعريف ومن التعاريف السابقة نستنتج ما يلي

- تا متزايدة تماما على ل $\Leftrightarrow \forall س_1 \in$ ل ، $\forall س_2 \in$ ل $(س_1 \neq س_2)$

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} > 0$$

- تا متزايدة على ل $\Leftrightarrow \forall س_1 \in$ ل ، $\forall س_2 \in$ ل $(س_1 \neq س_2)$

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} \geqslant 0$$

- تا متناقصة تماما على ل $\Leftrightarrow \forall س_1 \in$ ل ، $\forall س_2 \in$ ل $(س_1 \neq س_2)$

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} < 0$$

• تا متناقصة على ل $\Leftrightarrow \forall$ س$_1$ $\in$ ل ، $\forall$ س$_2$ $\in$ ل (س$_1$ $\neq$ س$_2$)

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} \leqslant 0$$

• تا ثابتة على ل $\Leftrightarrow \forall$ س$_1$ $\in$ ل ، $\forall$ س$_2$ $\in$ ل (س$_1$ $\neq$ س$_2$)

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} = 0$$

3.2 ـ جدول تغيرات دالة

إن دراسة تغيرات دالة تا تعني تعيين المجالات من مجموعة تعريفها التي تكون فيها تا متزايدة والمجالات التي تكون فيها تا متناقصة

تسجل نتائج هذه الدراسة في جدول يسمى جدول تغيرات تا

إذا كانت تا متزايدة على المجال] أ ، ب [نرسم الجدول التالي

س	أ ب
تا	↗

وَ إذا كانت متناقصة على المجال] أ ، ب [نرسم الجدول التالي :

س	أ ب
تا	↘

3 ـ التمثيل البياني لدالة

المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$)

1.3 ـ تعريف :

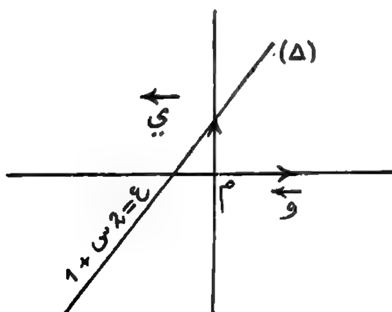
تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف

> التمثيل البياني (ي) للدالة تا في المعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$) هو مجموعة النقط ه (س ، ع) من المستوي بحيث يكون :
>
> س $\in$ ف و ع = تا (س)

المجموعة (ى) تسمى أيضا المنحني الممثل للدالة تأ
المعادلة ع = تا (س) تسمى معادلة المنحني (ي)

مثال :

المنحني الممثل للدالة تا : س ↦ 2 س + 1
هو مجموعة النقط ۻ (س ، ع) من المستوي بحيث يكون
س ∋ ح و ع = 2 س + 1
ونعلم أن ع = 2 س + 1
هي معادلة مستقيم (Δ)



2.3 ـ العناصر التي تساعد على رسم المنحنيات

- **الدوال الزوجية**

تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف من ح

> تكون الدالة تا زوجية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي
> ∀ س ∋ ف : ـ س ∋ ف وَ تا (ـ س) = تا (س)

أمثلة :

1) الدالة العددية س ← $س^2$ زوجية لأنه :
∀ س ∋ ح : ـ س ∋ ح و $(- س)^2 = س^2$.

2) الدالة العددية س ↦ $\frac{1}{|س|}$ زوجية لأنه

∀ س ∋ ح* : ـ س ∋ ح* و $\frac{1}{|-س|} = \frac{1}{|س|}$

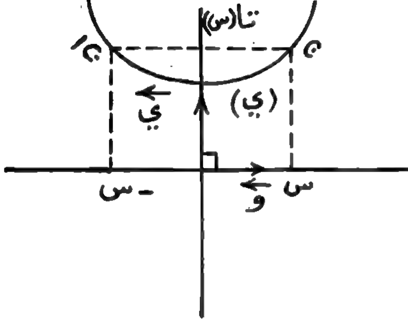
3) الدالة العددية س ↤ تجب س زوجية لأنه

∀ س ∈ ح : − س ∈ ح و تجب (− س) = تجب س

إذا كانت الدالة تا زوجية وكان (ي) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد (م ، و⃖ ، ى⃖) فإن النقطتين

ﻫ (س ، تا (س)) وَ

ﻫ' (− س ، تا (− س)) لهما



فاصلتان متعاكستان وترتيبان متساويان ، فهما متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب

محور التراتيب هو محور تناظر للمنحني (ي)

• **الدوال الفردية :**

تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف من ح

تكون الدالة تا فردية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي ∀ س ∈ ف : − س ∈ ف و تا (− س) = − تا (س)

أمثلة :

1) الدالة العددية س ↤ $\frac{2}{س}$ فردية لأن :

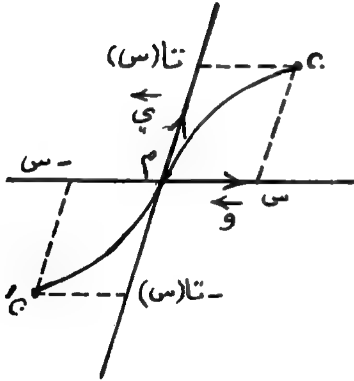
∀ س ∈ ح* : − س ∈ ح* وَ $\frac{2}{-س} = -\frac{2}{س}$

2) الدالة العددية س ↦ جب س فردية لأن :

∀ س ∈ ح : − س ∈ ح وَ جب (− س) = − جب س

3) الدالة العددية س ↦ $س^3$ فردية لإن :

∀ س ∈ ح : − س ∈ ح وَ $(- س)^3 = - س^3$



إذا كانت الدالة تا فردية وكان (ي) تمثيلها البياني في المعلم (م ، و⃖ ، ي⃖) فإن النقطتين

ن (س ، تا (س))

وَ نَ' (− س ، تا (− س)) لهما فاصلتان متعاكستان وَترتيبان متعاكسان فهما متناظرتان بالنسبة إلى النقطة م

المبدأ م هو مركز تناظر للمنحني (ي)

• دورية دالة :

تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف من ح
ى عدد حقيقي موجب غير معدوم

يكون العدد ى دوراً للدالة تا إذا وفقط إذا تحقق ما يلي ∀ س ∈ ف : (س + ى) ∈ ف ، (س − ى) ∈ ف وَ تا (س + ى) = تا (س)

أمثلة :

1) العدد 2π هو دور لكل من الدالتين

س ↤ جب س و س ↤ تجب س

لأنه مهما يكن العدد الحقيقي س لدينا

(س + 2π) ∋ ح ، (س − 2π) ∋ ح

وَ جب (س + 2π) = جب س وَ تجب (س + 2π) = تجب س

2) العدد π سو دور للدالة س ↤ ظل س

لانه مهما يكن العدد الحقيقي س من مجموعة تعريفها ف لدينا :

(س + π) ∋ ف . (س − π) ∋ ف وَ ظل (س + π) = ظل س

ملاحظتان :

- إذا كان ى دوراً للدالة تا فمن الواضح أن :

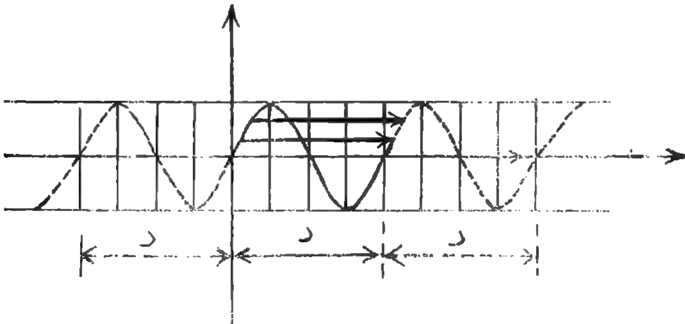
∀ س ∋ ف : تا (س + 2 ى) = تا (س) ؛

تا (س + 3 ى) = تا (س) ؛ تا (س − ى) = تا (س)

وبصورة عامة يمكن التأكد من النتيجة التالية :

∀ س ∋ ف ؛ ∀ ك ∋ صہ : تا (س + ى ك) = تا (س)

- إذا كان ى دوراً للدالة تا و (ي) تمثيلها البياني فإن كل نقط (ي) التي فواصلها من الشكل س + ى ك . (ك ∋ صہ) لها نفس الترتيب تا (س) ولرسم المنحي (ي) يكفي رسمه في مجال طوله ى ثم إتمامه باستعمال الخاصية السابقة .



29 الدالة التآلفية

1 ـ تعريف :

نسمي دالة تآلفية كل دالة عددية تا للمتغير الحقيقي س المعرفة كما يلي :

تا (س) = ا س + ب حيث ا و ب عددان حقيقيان

• إذا كان ب معدوماً نقول إن الدالة تا **خطية**

• إذا كان ا معدوماً تكون الدالة تا **ثابتة**

أمثلة :

1) الدالة : س ↤ − 2 س + 1 تآلفية .

2) الدالة : س ↤ 4 س تآلفية وهي خطية

3) الدالة : س ↤ − 5 تآلفية وهي ثابتة

4) الدالة : س ↤ $س^2$ + 1 ليست تآلفية .

2 ـ دراسة الدالة تا : س ↤ 4 س

• **مجموعة التعريف** : الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير**

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$

لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{4س_1 - 4س_2}{س_1 - س_2} = 4$$

بما أن هذه النسبة موجبة تماما فإن الدالة تا متزايدة تماماً على ح .

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |** :

الجدول التالي يعطي بعض القيم الكبيرة للعدد س
وقيم تا (س) المناسبة لها .

س	10	10^2	10^3	10^4
تا (س)	40	400	4000	40000

نلاحظ أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيراً .
والسؤال الذي يمكن طرحه هو : هل يمكن جعل تا (س) كبيراً بالقدر الذي نريده ؟
وبتعبير آخر : هل يمكن جعل تا (س) أكبر من أي عدد معلوم ل ؟
لدينا :

تا (س) > ل ⟸⟹ 4 س > ل

$$\Longleftrightarrow س > \frac{ل}{4}$$

إذن للحصول على تا (س) > ل يكفي أخذ س > $\frac{ل}{4}$ (مثلا لكي يكون

تا (س) > 10^9 يكفي أخذ س > $\frac{1}{4}10^9$)

ونعبر عن هذه الحالة بالقول :

إن تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** ← + ∞ **عندما س** ← + ∞

ومن جهة أخرى نلاحظ ، في الجدول التالي :

س	-10^2	-10^2	-10^3	-10^4
تا (س)	40 −	400 −	4000 −	40000 −

أن قيم (– تا (س)) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون (– س) كبيراً . يمكن ، هنا ، القول إن :

(– تا (س)) ← + ∞ عندما (– س) ← + ∞

نقول ، في هذه الحالة ، إن :

تا (س) يؤول إلى ناقص ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** ← – ∞ **عندما س** ← – ∞

• **جدول التغيرات** :

نسجل في الجدول التالي نتائج الدراسة السابقة :

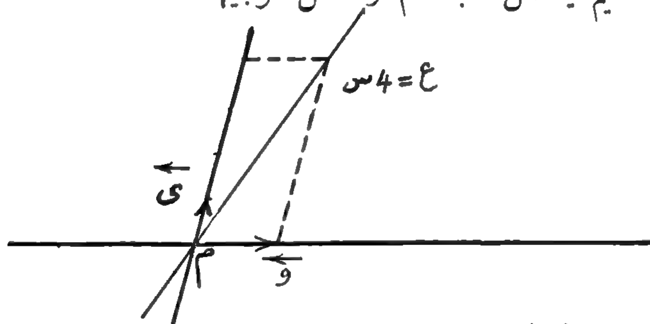
س	– ∞		+ ∞
4 س	– ∞	↗	+ ∞

• **التمثيل البياني** : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) المنحني الممثل للدالة تا : س ↤ 4 س هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي حيث :

س ∈ ح و ع = 4 س

ونعلم أن ع = 4 س هي معادلة مستقيم .

هذا المستقيم يشمل المبدأ م ومعامل توجيهه 4



3 ـ دراسة الدالة تا : س ↤ – 2 س + 1 :

• **مجموعة التعريف** : الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير**

مهما كان العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$

لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{(-2س_1 + 1) - (-2س_2 + 1)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{-2(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2} = -2$$

بما أن هذه النسبة سالبة تماماً فإن الدالة تا متناقصة تماماً على ح .

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد |س|**

الجدول التالي يعطي بعض القيم الكبيرة للعدد س وقيم تا (س) المناسبة لها :

س	10	10^2	10^3	10^4
تا(س)	−19	−199	−1999	−19999

نلاحظ أن قيم (− تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيراً .

نفس السؤال الذي طرح في المثال السابق يمكن طرحه هنا :

هل يمكن جعل (− تا(س)) أكبر من أي عدد معلوم ل ؟

لدينا :

$$-تا(س) > ل \Leftrightarrow -(-2س + 1) > ل$$

$$\Leftrightarrow س > \frac{1 + ل}{2}$$

إذن :

لكي يكون (− تا (س)) > ل يكفي أخذ $س > \frac{1+ل}{2}$) مثلاً

للحصول على − تا (س) > 10^{11} يكفي أخذ س > $\left(\frac{1 + 10^{11}}{2}\right.$

ونعبّر عن هذه الحالة بالقول إن :

تا (س) يؤول إلى ناقص ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** ← − ∞ **عندما س** ← + ∞

ومن جهة أخرى وبطريقة مماثلة نحصل على ما يلي :

يؤول تا (س) إلى ما لا نهاية عندما يؤول (− س) إلى ما لا نهاية .

نقول في هذه الحالة إن :

تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** ← + ∞ **عندما س** ← − ∞

• **جدول التغيرات** :

نسجل في الجدول التالي نتائج الدراسة السابقة :

س	−∞	+∞
−2 س+1	+∞ ↘	−∞

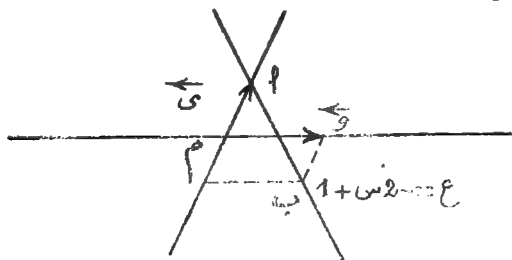
• **التمثيل البياني** : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) المنحني الممثل للدالة تا : س ↦ − 2 س + 1

هو مجموعة النقط ⊙ (س ، ع) من المستوي حيث :

س ∋ ح و ع = − 2 س + 1

ونعلم أن ع = − 2 س + 1 هي معادلة مستقيم .

لرسم هذا المستقيم يكفي أخذ نقطتين منه مثلا النقطتين أ (0 ، 1) و ب (1 ، − 1) .



4 ـ دراسة الدالة التآلفية تا : س ↦ أ س + ب

• **مجموعة التعريف :**

الدالة التآلفية س ↦ أ س + ب معرفة على ح .

• **اتجاه التغير**

مهما كان العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{(أس_1 + ب) - (أس_2 + ب)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{أ(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2} = أ$$

نميز ثلاث حالات :

إذا كان أ = 0 تكون الدالة تا ثابتة على ح .

إذا كان أ > 0 تكون الدالة تا متزايدة تماما على ح .

إذا كان أ < 0 تكون الدالة تا متناقصة تماما على ح .

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد |س|**

كما رأينا في المثالين السابقين يمكن التأكد من النتائج التالية :

1) إذا كان أ > 0 فإن :

تا (س) ← + ∞ عندما س ← + ∞

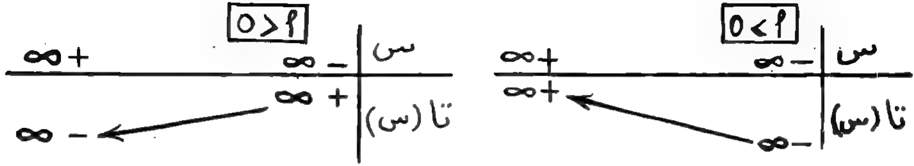
تا (س) ← − ∞ عندما س ← − ∞

2) إذا كان أ < 0 فإن :

تا (س) ← − ∞ عندما س ← + ∞

تا (س) ← + ∞ عندما س ← − ∞

• جدول التغيرات :

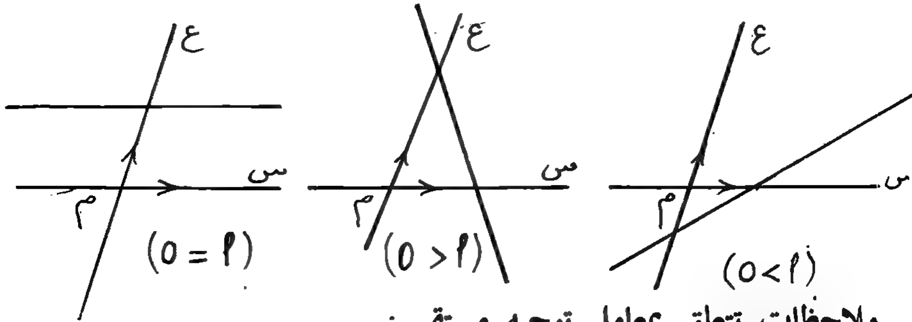


• **التمثيل البياني** : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) المنحني الممثل للدالة التآلفية س ↤ أ س + ب

هو مجموعة النقط ھ (س ، ع) من المستوي حيث :

س ∈ ح و ع = أ س + ب .

ونعلم أن ع = أ س + ب هي معادلة مستقيم معامل توجيهه أ .



ملاحظات تتعلق بمعامل توجيه مستقيم :

نذكر فيما يلي بعض النتائج المتعلقة بمعامل توجيه مستقيم :

• معامل توجيه المستقيم الذي يشمل النقطتين $ھ_1$ ($س_1$ ، $ع_1$)

و $ھ_2$ ($س_2$ ، $ع_2$) حيث $س_1 \neq س_2$ هو النسبة : $\frac{ع_1 - ع_2}{س_1 - س_2}$

• إذا كان أ و أ' معاملي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') فإن :

$$أ = أ' \Leftrightarrow (\Delta) // (\Delta')$$

• إذا كان أ و أ' معاملي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') وكان المعلم متعامداً ومتجانساً فإن :

$$أأ' = -1 \Leftrightarrow (\Delta) \perp (\Delta')$$

30

الدالة س $\mapsto$ أ س^2 + ب س + جـ (أ $\neq 0$)

1 ـ دراسة الدالة تا : س $\mapsto$ س^2 :

• **مجموعة التعريف :**

الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير :**

مهما كان العددان الحقيقيان المختلفان س$_1$ و س$_2$ لدينا :

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} = \frac{\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= \frac{(\text{س}_1 + \text{س}_2)(\text{س}_1 - \text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= \text{س}_1 + \text{س}_2$$

إذا كان س$_1 \geqslant 0$ و س$_2 \geqslant 0$ و س$_1 \neq$ س$_2$ فإن : س$_1$ + س$_2 > 0$

وإذا كان س$_1 \leqslant 0$ و س$_2 \leqslant 0$ و س$_1 \neq$ س$_2$ فإن : س$_1$ + س$_2 < 0$

إذن :

الدالة تا متناقصة تماماً على] $-\infty$ ، 0] ومتزايدة تماماً على [0 ، $+\infty$ [.

لدينا :

تا (0) = 0 و $\forall$ س $\in$ ح : تا (س) $\geqslant$ تا (0)

يسمى العدد تا (0) **القيمة الصغرى** للدالة تا .

• دراسة الدالة تا **من** أجل **القيم الكبيرة** للعدد | **س** | .

نلاحظ [illegible] الجدول التالي ، أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر [illegible] س كبيراً

س	10	10^2	10^3	10^4
تا (س)	10^2	10^4	10^6	10^8

لنفرض أن س موجب وَ لنبرهن أنه يمكن جعل تا (س) أكبر من أي عدد معلوم موجب ل .

تا (س) > ل ⟺ س^2 > ل

⟺ س > $\sqrt{ل}$ (لأن س موجب)

لكي يكون تا (س) > ل يكفي أخذ س > $\sqrt{ل}$ (مثلاً للحصول على تا (س) > 10^{12} يكفي أخذ س > 10^6) .

نعبر عن هذه الحالة بالقول :

إن تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ما لا نهاية

ونكتب :

تا (س) ← + ∞ **عندما س** ← + ∞

وبطريقة مماثلة نحصل على ما يلي :

يؤول تا (س) إلى ما لا نهاية عندما يؤول (− س) إلى ما نهاية .

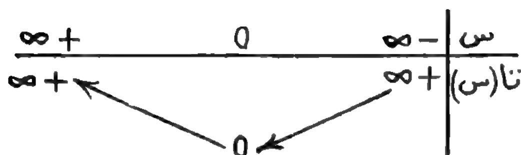
نقول ، في هذه الحالة إن :

تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية .

ونكتب :

تا (س) ← + ∞ **عندما س** ← − ∞

• **جدول التغيرات** :



• **التمثيل البياني** :

المستوي منسوب إلى المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) .

المنحني الممثل للدالة س ↦ س^2 هو مجموعة النقط ة (س ، ع) من المستوي حيث س ∈ ح و ع = س^2 .

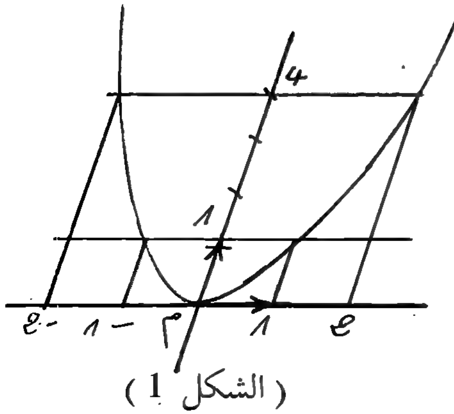
لرسم هذا المنحني ننشيء بعض النقط منه .

الجدول التالي يعطي إحداثيات هذه النقط

س	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
ع = س²	9	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	9

يسمى هذا المنحني **قطعا مكافئاً** (الشكل 1)

نلاحظ أن هذا المنحني يشمل النقطة م وَإذا أنشأنا عدة نقط مجاورة للنقطة م نحصل على منحن له المظهر المبيّن في الشكل المجاور .



(الشكل 1)

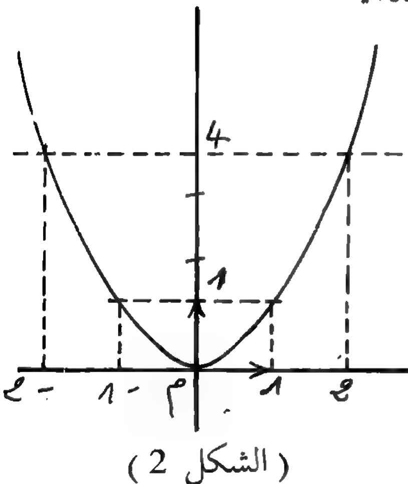
من جهة أخرى نلاحظ أن الدالة تا زوجية :

$\forall$ س $\in$ ح : (− س) $\in$ ح

و تا (س) = تا (− س)

إذن ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ، محور التراتيب هو محور تناظر للمنحني . (الشكل 2)

تسمي النقطة م **ذروة القطع المكافيء**



(الشكل 2)

2 ـ دراسة الدالة تا : س ⟼ -2 س^2 $+ 3$

• **مجموعة التعريف**

الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير** :

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان س$_1$ و س$_2$ لدينا :

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} = \frac{(-2\text{س}_1^2 + 3) - (-2\text{س}_2^2 + 3)}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= \frac{-2(\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= -2(\text{س}_1 + \text{س}_2)$$

إذا كان س$_1 \leqslant 0$ وَ س$_2 \leqslant 0$ وَ س$_1 \neq$ س$_2$ فإن :

$-2(\text{س}_1 + \text{س}_2) > 0$

إذا كان س$_1 \geqslant 0$ وَ س$_2 \geqslant 0$ وَ س$_1 \neq$ س$_2$ فإن :

$-2(\text{س}_1 + \text{س}_2) < 0$

إذن :

الدالة تا متزايدة تماماً على]$-\infty$ ، 0] ومتناقصة تماماً على [0 ، $+\infty$[

لدينا :

تا (0) = 3 و $\forall$ س $\in$ ح : تا (س) $-$ تا (0) $= -2$ س^2

إذن : $\forall$ س $\in$ ح تا (س) $\leqslant$ تا (0)

يسمى العدد تا (0) القيمة العظمى للدالة تا .

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س | .**

نلاحظ ، في الجدولين التاليين

س	-10	-10^2	-10^3
تا (س)	-197	-1997	-19997

س	10	10^2	10^3
تا (س)	-197	-1997	-19997

أن قيم (− تا (س)) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما تكون قيم | س | كبيرة .

كما رأينا في الأمثلة السابقة يمكن التأكد من النتيجة التالية :

تا (س) $\leftarrow -\infty$ **عندما س** $\leftarrow +\infty$

تا (س) $\leftarrow -\infty$ **عندما س** $\leftarrow -\infty$

• **جدول التغيرات** :

س	$-\infty$		0		$+\infty$
تا(س)	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

• **التمثيل البياني** :

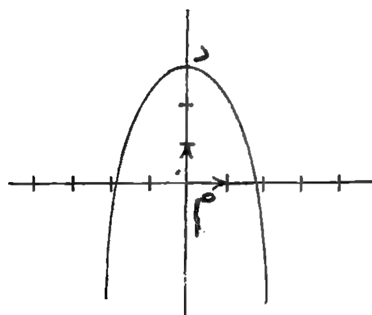
المنحني (γ) الممثل للدالة : س $\mapsto -2$ س$^2 + 3$ هو مجموعة النقط ∋ (س ، ع) من المستوي حيث س ∋ ح وَ ع $= -2$ س$^2 + 3$.

الجدول التالي يعطي إحداثيات بعض النقط من (γ)

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
تا (س)	-15	-5	$+1$	3	1	-5	-15

المنحني (γ) يسمى ، أيضاً ، **قطعا مكافئاً** .

إذا رسمنا (γ) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد نحصل على منحنٍ له المظهر المبيّن في الشكل التالي :



محور التراتيب هو محور تناظر (γ) .
ذروة القطع المكافيء (γ)
هي النقطة ى (0 ، 3)

3. دراسة الدالة تا : س $\mapsto \frac{1}{2}$ س^2 − 2 س + 1

• **مجموعة التعريف** :

الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير** :

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان س$_1$ و س$_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{\left(\frac{1}{2}س_1^2 - 2س_1 + 1\right) - \left(\frac{1}{2}س_2^2 - 2س_2 + 1\right)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(س_1^2 - س_2^2) - 2(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{(س_1 - س_2)\left[\frac{1}{2}(س_1 + س_2) - 2\right]}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{1}{2}(س_1 + س_2) - 2$$

يمكن كتابة نسبة التزايد كما يلي :

$$\frac{تا(س_1)-تا(س_2)}{س_1-س_2}=\frac{1}{2}\left[س_1+س_2-4\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(س_1-2)+(س_2-2)\right]$$

إذا كان $س_1 \leqslant 2$ وَ $س_2 \leqslant 2$ وَ $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$\frac{1}{2}\left[(س_1-2)+(س_2-2)\right] < 0$$

إذا كان $س_1 \geqslant 2$ وَ $س_2 \geqslant 2$ وَ $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$\frac{1}{2}\left[(س_1-2)+(س_2-2)\right] > 0$$

إذن :

الدالة تا متناقصة تماماً على $]-\infty ، 2]$ وَ متزايدة تماماً على $[2 ، +\infty[$

لدينا : $تا(2)=-1$ وَ $\forall س \in ح$ $تا(س) \geqslant تا(2)$

لأن : $\forall س \in ح$ $تا(س)-تا(2)=\frac{1}{2}(س-2)^2$

تا (2) هو القيمة الصغرى للدالة تا .

• دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |

نلاحظ ، في الجدولين التاليين

س	10	10^2	10^3
تا(س)	31	4801	498001

س	-10	-10^2	-10^3
تا(س)	71	5201	502001

أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما تكون قيم | س | كبيرة.
كما رأينا في الأمثلة السابقة ، يمكن التأكد من النتيجة التالية :

تا (س) ← + ∞ عندما س ← + ∞

تا (س) ← + ∞ عندما س ← − ∞

• **جدول التغيرات** :

س	− ∞		2		+ ∞
تا(س)	+ ∞	↘	− 1	↗	+ ∞

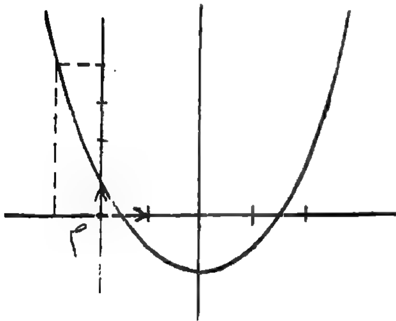
• **التمثيل البياني** :

المنحني (ﻻ) للدالة س ↦ $\frac{1}{2}$ س² − 2س + 1 هو مجموعة النقط

ﻫ (س ، ع) من المستوي حيث س ∈ ح وَ ع = $\frac{1}{2}$ س² − 2 س + 1 .

الجدول التالي يعطي إحداثيات بعض النقط من (ﻻ)

س	− 1	0	1	2	3	4
تا (س)	$\frac{7}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	− 1	$-\frac{1}{2}$	1



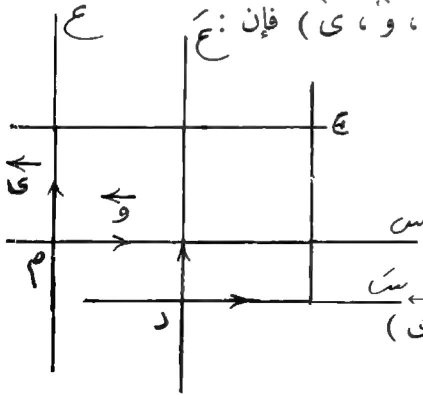
المنحني (ﻻ) يسمى ، أيضاً ، **قطعا مكافئاً** .

وفي المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) ، المستقيم ذو المعادلة س = 2 هو محور تناظر للمنحني (ﻻ) .

ولإثبات ذلك نقوم بتغيير للمعلم محتفظين بالأساس ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) ومتخذين النقطة ء (2 ، − 1) مبدأ جديداً .

(كما هو مبين في جدول التغيرات ، الدالة تا تأخذ قيمتها الصغرى (− 1) من أجل س = 2) .

نعلم أنه إذا كان (س ، ع) إحداثيي النقطة ه في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) و (س′ ، ع′) إحداثييها في المعلم (ء ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) فإن :



س = 2 + س′

ع = − 1 + ع′

معادلة (γ) في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

هي ع = $\frac{1}{2}$ س² − 2 س + 1

ومعادلته في المعلم الجديد (ء ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) هي :

$$- 1 + ع′ = \frac{1}{2}(2 + س′)^2 - 2(2 + س′) + 1$$

أي : ع′ = $\frac{1}{2}$ س′²

بما أن الدالة س′ ⟼ $\frac{1}{2}$ س′² زوجية فإن محور التراتيب للمعلم الجديد هو محور تناظر لتمثيلها البياني (γ)

معادلة هذا المحور ، في المعلم الجديد هي س′ = 0

ومعادلته ، في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) هي س = 2 .

إذن : المستقيم ذو المعادلة س = 2 هو محور تناظر للمنحني (γ)

4 ـ **دراسة الدالة تا : $س \longmapsto أس^2 + ب س + حـ \quad (أ \neq 0)$:**

• **مجموعة التعريف**

الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير :**

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{(أس_1^2 + ب س_1 + حـ) - (أس_2^2 + ب س_2 + حـ)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{أ(س_1^2 - س_2^2) + ب(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{(س_1 - س_2)[أ(س_1 + س_2) + ب]}{س_1 - س_2}$$

$$= أ(س_1 + س_2) + ب$$

يمكن كتابة نسبة التزايدات هذه كما يلي :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = أ\left[(س_1 + س_2) + \frac{ب}{أ}\right]$$

$$= أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right]$$

نميز حالتين : $أ > 0$. وَ $أ < 0$

الحالة الأولى $أ > 0$:

إذا كان $س_1 \geq -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_2 \geq -\frac{ب}{2أ}$ و $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] > 0$$

إذا كان $س_1 \leq -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_2 \leq -\frac{ب}{2أ}$ و $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] < 0$$

إذن :

الدالة تا متناقصة تماماً على $]-\infty ، -\frac{ب}{2أ}]$ ومتزايدة تماما على

$$[-\frac{ب}{2أ} ، +\infty[$$

الحالة الثانية $أ < 0$:

إذا كان $س_1 \geq -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_2 \geq -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] < 0$$

إذا كان $س_1 \leq -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_2 \leq -\frac{ب}{2أ}$ و $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] > 0 .$$

إذن :

الدالة تا متزايدة تماماً على $\left] -\infty , -\frac{ب}{2أ} \right]$ ومتناقصة تماماً على

$\left[-\frac{ب}{2أ} , +\infty \right[$

لدينا : $تا\left(-\frac{ب}{2أ}\right) = أ\left(\frac{-ب}{2أ}\right)^2 + ب\left(\frac{-ب}{2أ}\right) + ح$

$= \frac{4أح - ب^2}{4أ}$

$\forall$ س $\in$ ح : $تا(س) - تا\left(\frac{-ب}{2أ}\right) = أس^2 + ب س + ح - \frac{4أح - ب^2}{4أ}$

$= أس^2 + ب س + \frac{ب^2}{4أ}$

$= أ\left(س + \frac{ب}{2أ}\right)^2$

إذن :

ـ إذا كان أ > 0 فإن : $\forall$ س $\in$ ح تا (س) $\geqslant$ $تا\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$

$تا\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$ هي **القيمة الصغرى للدالة تا**

- إذا كان أ < 0 فإن : ∀ س ∈ ح تا (س) ⩽ تا $\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$

تا $\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$ هي **القيمة العظمى للدالة تا**

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |**

إذا حسبنا قيم تا (س) من أجل بعض القيم الكبيرة للعدد | س | نلاحظ أن قيم | تا (س) | تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون | س | كبيراً .

ويمكن التأكد من النتائج التالية :

- **إذا كان** أ > 0 فإن :

تا (س) ← + ∞ **عندما** س ← + ∞

تا (س) ← + ∞ **عندما** س ← − ∞

- **إذا كان** أ < 0 فإن :

تا (س) ← − ∞ **عندما** س ← + ∞

تا (س) ← − ∞ **عندما** س ← − ∞

• **جدول التغيرات** :

أ > 0

س	−∞		$-\frac{ب}{2أ}$		+∞
تا(س)	+∞	↘	$\frac{4أحـ-ب^2}{4أ}$	↗	+∞

أ < 0

س	−∞		$-\frac{ب}{2أ}$		+∞
تا(س)	−∞	↗	$\frac{4أحـ-ب^2}{4أ}$	↘	−∞

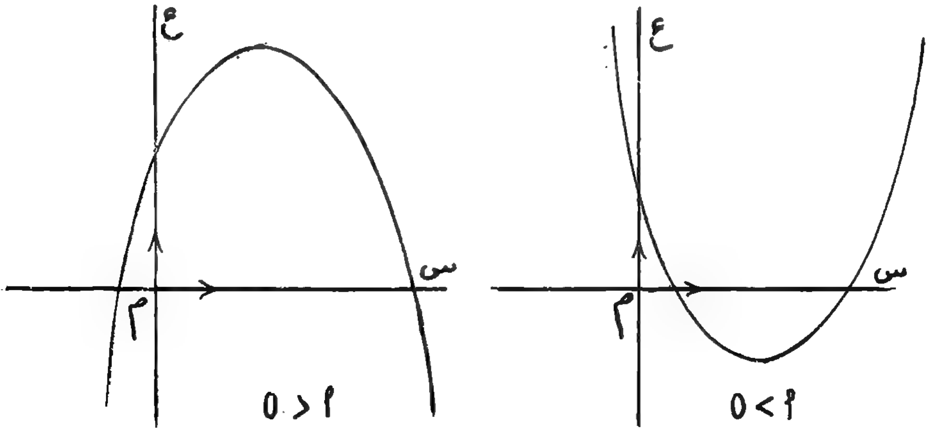
• **التمثيل البياني** :

التمثيل البياني (γ) للدالة س ↦ أ $س^2$ + ب س + حـ (أ ≠ 0)

هو مجموعة النقط م (س ، ع) من المستوي حيث :

$س \in ح$ و $ع = ا س^2 + ب س + حـ$ ($ا \neq 0$)
يسمى المنحني (γ) **قطعا مكافئا**

المنحنيان المرسومان في الشكلين التاليين هما تمثيلان بيانيان لدالتين من الشكل $س \mapsto ا س^2 + ب س + حـ$ في الحالتين $ا > 0$ و $ا < 0$



وفي المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ، المستقيم الذي معادلته

$س = -\frac{ب}{2ا}$ هو محور تناظر للمنحني (γ)

ويمكن التأكد من ذلك ، مثلا بإجراء تغيير للمعلم كما رأينا في المثال السابق .

والنقطة ء $\left(-\frac{ب}{2ا} ، \frac{4ا حـ - ب^2}{4ا} \right)$ هي ذروة القطع المكافيء (γ)

31	الدالة س $\mapsto \frac{أ}{س}$ (أ $\neq 0$)

1 ـ دراسة الدالة تا : س $\mapsto \frac{1}{س}$

1.1 ـ مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة إذا وفقط إذا كان س $\neq 0$

$ف_{تا} = ح^* =]-\infty ، 0[\cup]0 ، +\infty[$

2.1 ـ اتجاه التغيّر :

$س_1$ و $س_2$ عددان مختلفان من نفس المجال

($]-\infty ، 0[$ أو $]0 ، +\infty[$)

لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{\frac{1}{س_1} - \frac{1}{س_2}}{س_1 - س_2} = \frac{س_2 - س_1}{س_1 س_2 (س_1 - س_2)}$$

$$= -\frac{1}{س_1 س_2}$$

بما أن $س_1$ و $س_2$ لهما نفس الإشارة فإن :

$س_1 س_2 > 0$ و $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} < 0$

إذن :

الدالة تا متناقصة تماما على كلّ من المجالين $]-\infty ، 0[$ و $]0 ، +\infty[$

3.1 ـ دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |

نلاحظ في الجدول التالي :

س	10	10^2	10^3	10^4
$\frac{1}{س}$	0,1	0,01	0,001	0,0001

أن قيم تا (س) تكون قريبة من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيرا.
هل يمكن جعل تا (س) قريبا من الصفر بالقدر الذي نريده ؟ وبعبارة أخرى :

عندما يكون س كبيرا . هل يمكن جعل تا (س) موجباً وأصغر من أي عدد موجب تماما ε ؟

$$0 < \text{تا}(س) < \varepsilon \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{س} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow س > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

إذن للحصول على $0 < \text{تا}(س) < \varepsilon$ يكفي أخذ $س > \frac{1}{\varepsilon}$

(مثلا لكي يكون $0 < \text{تا}(س) < 10^{-9}$ يكفي أخذ $س > 10^9$).
ونعبر عن هذه الحالة بالقول :
إن تا (س) يؤول إلى الصفر عندما يؤول س إلى ما لا نهاية
ونكتب : $\text{تا}(س) \to 0$ عندما $س \to +\infty$

ومن جهة أخرى نلاحظ في الجدول التالي

س	-10^{1}	-10^{2}	-10^{3}	-10^{4}	-10^{5}
$\frac{1}{س}$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$

أن قيم تا (س) تكون كذلك قريبة من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما يكون (– س) كبيرا

وبطريقة مماثلة يمكن التأكد من النتيجة التالية

– تا (س) ← 0 عندما – س ← + ∞

ونقول إن تا (س) يؤول الى الصفر عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية

ونكتب : تا (س) ← 0 عندما س ← – ∞

4.1 ـ دراسة الدالة تا من أجل القيم القريبة من الصفر للعدد | س |

نلاحظ في الجدول التالي :

س	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	-10^{-5}
$\frac{1}{س}$	-10	-10^{2}	-10^{3}	-10^{4}	-10^{5}

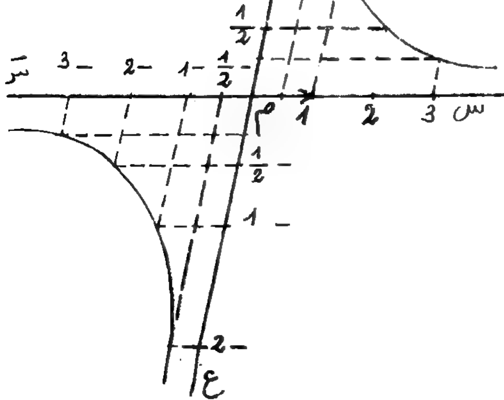
أن قيم | تا (س) | تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س قريبا من الصفر وبطريقة مماثلة كما سبق يمكن التأكد من النتيجتين التاليتين :

- يؤول تا (س) إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم موجبة
  ونكتب : تا (س) ← + ∞ عندما س $\overset{<}{\leftarrow}$ 0
- يؤول تا (س) إلى ناقص ما لا نهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم سالبة
  ونكتب : تا (س) ← – ∞ عندما س $\overset{>}{\leftarrow}$ 0

5.1 ـ جدول التغيرات :

س	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{س}$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

6.1 ـ التمثيل البياني :



• في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) ، المنحني (γ)

الممثل للدالة تا : س ⟼ $\frac{1}{س}$ هو

مجموعة النقط ۏ (س ، ع) من المستوي

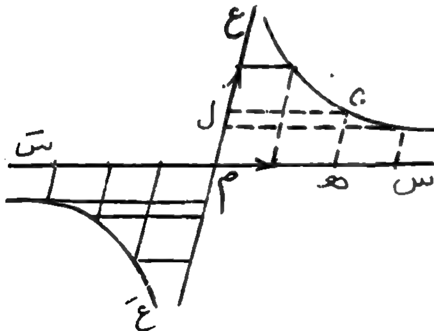
حيث س ∋ ح* و ع = $\frac{1}{س}$

يسمى المنحني (γ) **قطعا زائدا**

ويتألف هذا المنحني من فرعين منفصلين لأن العدد 0 ليست له صورة بالدالة تا

• **مركز التناظر** :

المبدأ م هو مركز تناظر للمنحني (γ) لأن الدالة تا فردية



• المستقيمات المقاربة

إذا كانت ۏ نقطة من (γ) وَ ه مسقطها على (سَ س) وفق منحى (عَ ع) وَ ل مسقطها على (عَ ع) وفق منحى (سَ س)

فإن :

الطول ح هـ يؤول إلى الصفر عندما يؤول الطول م هـ إلى ما لانهاية لأن ·

تا (س) ← 0 عندما س ← + ∞

تا (س) ← 0 عندما س ← − ∞

نقول إن المستقيم (س′ س) مستقيم مقارب للمنحني (γ)

وكذلك :

يؤول الطول م ل إلى ما لا نهاية عندما يؤول الطول ل د إلى الصفر لأن

تا (س) ← + ∞ عندما س $\overset{<}{\leftarrow}$ 0

تا (س) ← − ∞ عندما س $\overset{>}{\leftarrow}$ 0

نقول إن المستقيم (ع′ ع) مستقيم مقارب للمنحني (γ)

2 ـ دراسة الدالة تا : س ↦ $\frac{أ}{س}$ (أ ≠ 0)

1.2 ـ مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة إذا وفقط إذا كان س ≠ 0

ف$_{تا}$ =] − ∞ ، 0 [∪] 0 ، + ∞ [

2.2 ـ اتجاه التغيّر :

س$_1$ وَ س$_2$ عددان مختلفان من نفس المجال

( ] − ∞ ، 0 [أو] 0 ، + ∞ [ )

لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{\frac{أ}{س_1} - \frac{أ}{س_2}}{س_1 - س_2} = \frac{أ(س_2 - س_1)}{س_1 س_2 (س_1 - س_2)}$$

$$= -\frac{أ}{س_1 \, س_2}$$

بما أن $س_1$ و $س_2$ لهما نفس الإشارة فإن إشارة النسبة $\left(-\frac{أ}{س_1 \, س_2}\right)$ هي إشارة $(-أ)$

إذن :

- إذا كان $أ > 0$ فإن الدالة تا متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty ، 0[$ و $]0 ، +\infty[$
- إذا كان $أ < 0$ فإن الدالة تا متزايدة تماما على كلّ من المجالين $]-\infty ، 0[$ و $]0 ، +\infty[$

3.2 ـ دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد |س| وَ من أجل قيم س القريبة من الصفر

بدراسة مماثلة لدراسة الدالة $س \mapsto \frac{1}{س}$ نحصل على النتائج التالية :

$أ > 0$	$أ < 0$
$\frac{أ}{س} \to 0$ عندما $س \to +\infty$	$\frac{أ}{س} \to 0$ عندما $س \to +\infty$
$\frac{أ}{س} \to 0$ عندما $س \to -\infty$	$\frac{أ}{س} \to 0$ عندما $س \to -\infty$
$\frac{أ}{س} \to +\infty$ عندما $س \xrightarrow{>} 0$	$\frac{أ}{س} \to -\infty$ عندما $س \xrightarrow{>} 0$
$\frac{أ}{س} \to -\infty$ عندما $س \xrightarrow{<} 0$	$\frac{أ}{س} \to +\infty$ عندما $س \xrightarrow{<} 0$

4.2 ـ جدول التغيرات :

أ > 0

س	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{أ}{س}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

أ < 0

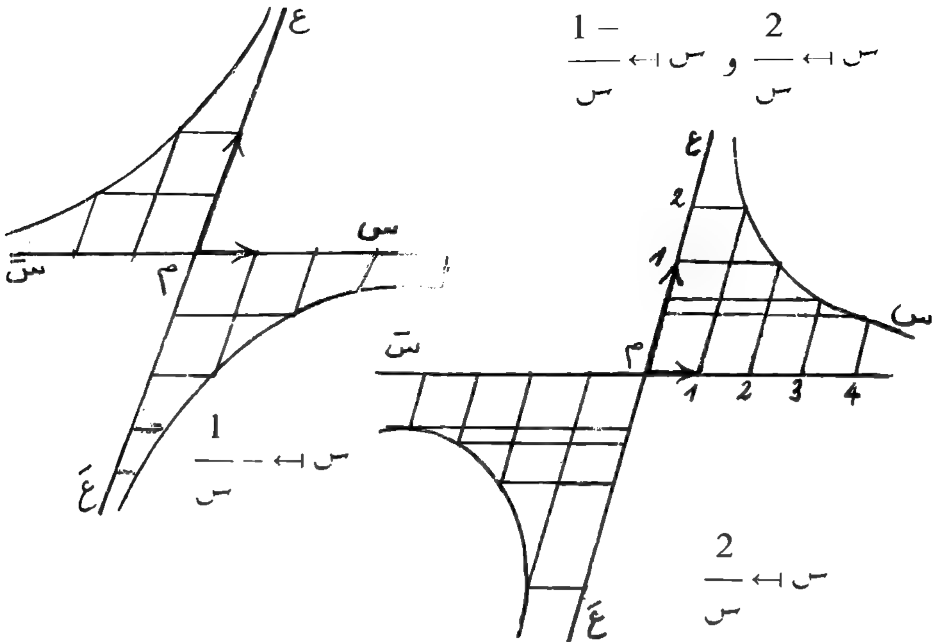
س	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{أ}{س}$	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

5.2 ـ التمثيل البياني

مهما يكن العدد الحقيقي غير المعدوم أ فإن المنحني الممثل للدالة س $\longmapsto \frac{أ}{س}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، و⃖ ، ي⃖) يسمى قطعا زائدا والمستقيمان (سَ س) و (عَ ع) هما مستقيمان مقاربان لهذا القطع الزائد والمبدأ م هو مركز تناظره

يبيّن الشكلان التاليان المنحنيين الممثلين للدالتين

س $\longmapsto \frac{2}{س}$ و س $\longmapsto \frac{-1}{س}$



تمارين

الدوال المذكورة في ما يلي هي دوال عددية لمتغير حقيقي

عموميات :

1. عيّن مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

1) $\text{س} \mapsto \dfrac{\text{س} + 4}{\text{س} - 2}$

2) $\text{س} \mapsto \dfrac{3\,\text{س} + 5}{\text{س}^2 - 4}$

3) $\text{س} \mapsto \dfrac{2\,\text{س} - 3}{2\,\text{س}^2 + \text{س}}$

4) $\text{س} \mapsto \dfrac{(\text{س} + 1)(\text{س} + 5)}{\text{س} + 1}$

5) $\text{س} \mapsto \sqrt{4 - \text{س}} + \sqrt{2\,\text{س} - 1}$

6) $\text{س} \mapsto \sqrt{\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س} - 4}$

7) $\text{س} \mapsto \sqrt{\text{س}^2 + 2\,\text{س} - 24}$

8) $\text{س} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\text{س} - 1}}$

9) $\text{س} \mapsto \sqrt{\dfrac{\text{س}}{1 + \text{س}}}$

10) $\text{س} \mapsto \dfrac{\text{س} + 2}{|\text{س}| + 3}$

11) $\text{س} \mapsto \dfrac{\text{س}}{\sqrt{|\text{س}|}}$

2. عيّن مجموعة تعريف الدالة تا المعرفة كما يلي :

$\text{تا}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}}$ إذا كان $\text{س} \neq 0$

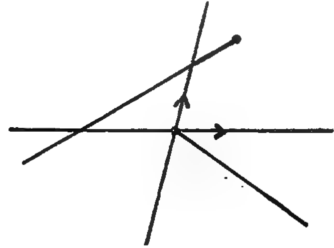
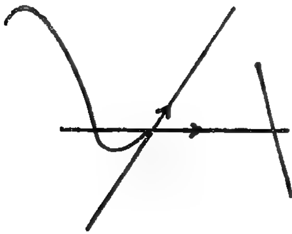
و $\text{تا}(0) = 0$

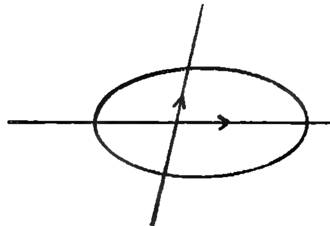
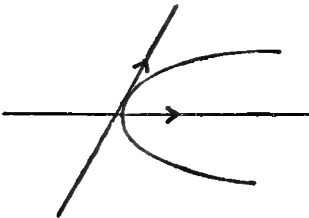
3) عيّن مجموعة تعريف الدالة ها المعرفة كما يلي :

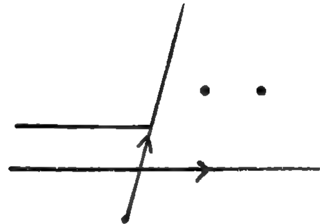
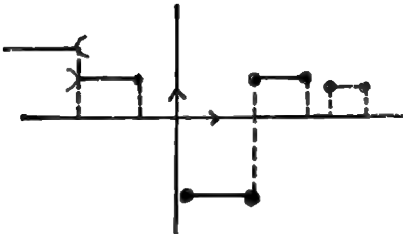
$$\text{ها}(\text{س}) = \frac{\text{س} - 1}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 5)} \quad \text{إذا كان س} \in]-\infty \text{ ، } 2[$$

$$\text{و ها}(\text{س}) = 1 - \sqrt{\text{س} - 2} \quad \text{إذا كان س} \in [2 \text{ ؛ } +\infty[$$

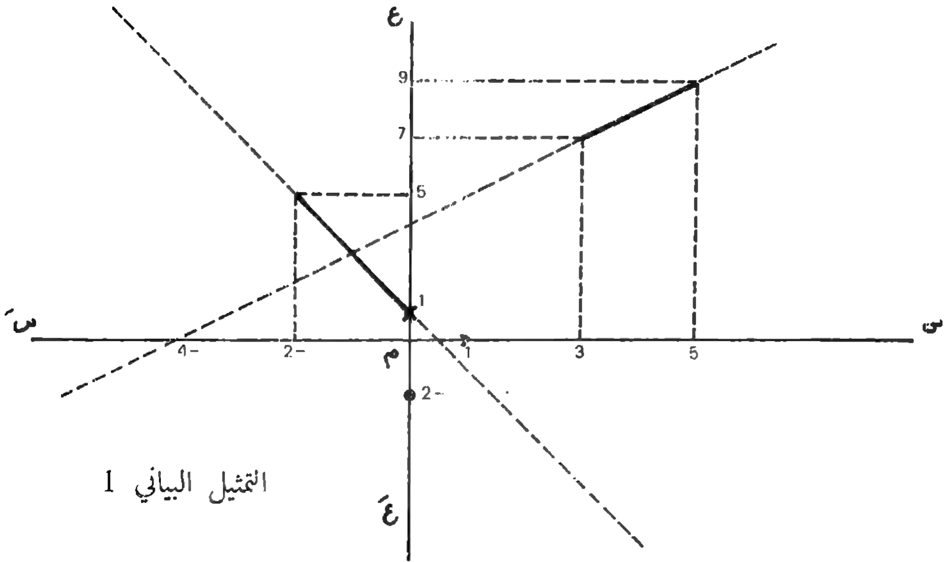
4. هل التمثيلات التالية تمثيلات بيانية لدوال ؟

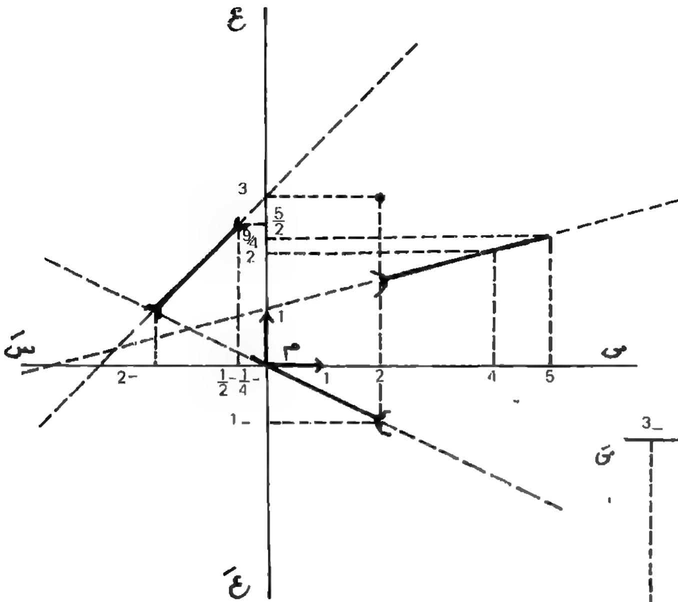



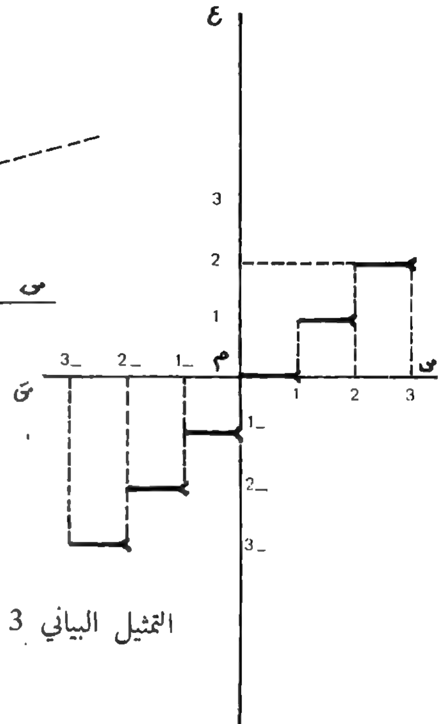
5. التمثيلات التالية تمثيلات بيانية لدو.. .طلب تعيينها



التمثيل البياني 1



التمثيل البياني 2



التمثيل البياني 3

6. بيّن أن الدالة تا المعرفة كما يلي متزايدة على المجال ف في كل حالة من الحالات التالية :

تا (س) = 2 س + 5 ف = [− 3 ، 6]

تا (س) = س^2 + 2 س − 3 ف = [0 ، + ∞ [

تا (س) = − $\frac{1}{س}$ ف =] − ∞ ، − 1]

تا (س) = $\frac{1}{2 - س}$ ف = [0 ، 2 [

تا (س) = س^3 ف =] − ∞ ، 0]

تا (س) = $\sqrt{س}$ ف = [0 ، 1]

7. أثبت أن الدالة تا : س ↦ 4 س^2 + 1 متزايدة على [2 ، 5] ومتناقصة على] − 1 ، 0 [وأنها غير رتيبة على [− 2 ، 3] .

8. دالتان تا وها معرفتان على مجال ف .
عا دالة معرفة على ف كما يلي :
∀ س ∈ ف عا (س) = تا (س) + ها (س) .
أثبت أنه :
1) إذا كانت تا و ها متزايدتين تماماً على ف ، فإن عا متزايدة تماماً على ف
2) إذا كانت تا و ها متناقصتين تماماً على ف ، فإن عا متناقصة تماماً على ف .

9. تا و ها دالتان معرفتان على مجال ف حيث :
∀ س ∈ ف تا (س) > 0 وَ ها (س) > 0
عا دالة معرفة على ف كما يلي :
∀ س ∈ ف ، عا (س) = تا (س) × ها (س) .
أثبت أنه :
1) إذا كانت تا و ها متزايدتين تماماً على ف ، فإن عا متزايدة تماماً على ف .
2) إذا كانت تا و ها متناقصتين تماماً على ف ، فإن عا متناقصة تماماً على ف

10. تا و ها دالتان معرفتان على مجال ف حيث :

∀ س ∋ ف تا (س) < 0 و ها (س) < 0 .

عا دالة معرفة على ف كما يلي :

∀ س ∋ ف عا (س) = تا (س) × ها (س) .

أدرس اتجاه تغير الدالة عا على ف ، في الحالتين التاليتين :

1) تا و ها متزايدتان تماماً على ف .

2) تا و ها متناقصتان تماماً على ف .

11. من بين الدوال التالية ، أذكر الدوال الفردية والدوال الزوجية

1) س ↤ س (س^2 − 5)   2) س ↤ $\frac{س}{س^2 + 1}$ 3) س ↤ $\frac{|س|}{س^2 + 1}$

4) س ↤ $\frac{3س - 1}{س^2 + 3}$ 5) س ↤ $\frac{س^3 - 2س}{2س^3 + س}$ 6) س ↤ $\frac{س^2 - 1}{س}$

7) س ↤ $\frac{س^3 + س}{س^4 + س^2 + 1}$ 8) س ↤ $\sqrt{س^2 - 4}$ 9) س ↤ $\sqrt{س^2 + س}$

10) س ↤ $\sqrt{\frac{س + 1}{س - 1}}$ 11) س ↤ $\sqrt{س (س + 1)} + \sqrt{س (س - 1)}$

12) س ↤ $|س| - 2$ 13) س ↤ $|س + 2|$ 14) س ↤ $\left|\frac{س - 1}{س + 1}\right|$

15) س ↤ $\frac{|س + 1| - |س - 1|}{|س + 1| + |س - 1|}$

12. تا دالة معرفة على ح حيث :

∀ س ∋ ح : 3 تا (− س) + تا (س) = 4 س^3 + 2 س .

بيّن أن الدالة تا فردية . ثم عيّنها

13. تا دالة معرفة على ح . عا و ها دالتان معرفتان على ح كما يلي :

∀ س ∋ ح عا (س) = $\frac{1}{2}$ [تا (س) + تا (− س)]

∀ س ∋ ح ها (س) = $\frac{1}{2}$ [تا (س) − تا (− س)]

1) أثبت أن الدالة عا زوجية وأن الدالة ها فردية

2) بين أن : ∀ س ∋ ح تا (س) = عا (س) + ها (س) .

14. دالة تا معرفة على مجال ف حيث ∀ س ∋ ف تا (س) ≠ 0 و (− س) ∋ ف

ها دالة معرفة على ف كما يلي :

∀ س ∋ ف ها (س) = $\frac{|\text{تا (س)}|}{\text{تا (|س|)}}$

بيّن أن الدالة ها زوجية في كل من الحالتين التاليتين :

1) تا زوجية 2) تا فردية

15. تا دالة زوجية معرفة على ح .

أثبت أنه إذا كانت تا متزايدة تماماً على [0 ، + ∞]

فإنها متناقصة تماماً على] − ∞ ، 0]

16. تا دالة فردية معرفة على ح .

بيّن أنه إذا كانت تا متزايدة على [0 ، + ∞ [فإنها متزايدة على] − ∞ ، 0] .

17. أثبت أن العدد π دورٌ للدالة س ↦ جب 2 س

18. أثبت أن العدد 2 π دورٌ للدالة س ↦ جب (س + π)

19 أثبت أن العدد $\frac{4\pi}{3}$ دورٌ للدالة س ↤ تجب $\left(\frac{3س}{2}\right)$

وأن العدد 2 π ليس دوراً لهذه الدالة .

20. أثبت أن العدد 6 π دورٌ للدالة س ↤ تجب س + ظل $\left(\frac{س}{3}\right)$

21. أثبت أن الدالة س ↤ $\frac{1}{س}$ غير دورية .

22. تا دالة معرفة على ح كما يلي :

∀ س ∈ [− 1 ، 1] تا (س) = |س| وَ 2 دورٌ للدالة تا

1) أرسم التمثيل البياني للدالة تا في المجال [− 3 ، 4]

2) حل ، في المجال [− 3 ، 4] ، المعادلة تا (س) = $\frac{1}{2}$

(يمكن استعمال المنحني)

23. تا دالة معرفة على ح كما يلي :

∀ س ∈ [− 1 ، 1 [تا (س) = س وَ 2 دورٌ للدالة تا .

1) أحسب تا (1) ؛ تا (2) ؛ تا (− 3)

2) ارسم التمثيل البياني للدالة تا في المجال [− 3 ، 4]

3) حل ، في المجال [− 3 ، 4] ، المعادلة تا (س) = 1

24. نعلم أن الجزء الصحيح للعدد الحقيقي س هو العدد الصحيح ي (س) حيث ي (س) ⩽ س < ي (س) + 1 .

نعتبر الدالة تا : س ↤ س − ي (س) .

1) أحسب تا (0) ، تا (1) ، تا (2) ، تا (− 2) ، تا (1,01) ، تا (− 2,45) ، تا $\left(\frac{2}{5}\right)$

2) أحسب تا (س) إذا كان س صحيحاً .

3) أُحسب تا (س) من أجل س ∋] 0 ، 1 [وَ من أجل س ∋] 1 ، 2 [

4) ارسم التمثيل البياني لهذه الدالة على المجال [0 ، 2]

5) بيّن أن العدد 1 دورٌ للدالة تا .

الدوال التآلفية :

25. نعتبر الدالة تا : س ↤ 3 س

1) عيّن مجموعة الاعداد الحقيقية س بحيث يكون :

تا (س) > 10^8

2) عيّن مجموعة الاعداد الحقيقية س بحيث يكون :

تا (س) < − 10^7

26. نعتبر الدالة تا : س ↤ − 5 س

1) أوجد عدداً حقيقيا α بحيث يكون :

س < α ⇐ تا (س) > 10^8

هل α وحيد ؟

2) β عدد حقيقي موجب تماماً . عيّن عدداً حقيقياً α يحقق ما يلي :

س < α ⇐ تا (س) > β

27. شكل جدول التغيرات لكل دالة من الدوال التالية :

ثم ارسم تمثيلها البياني في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) .

1) س ↤ 3 س + 1

2) س ↤ − $\frac{س}{2}$ + $\frac{1}{4}$

3) س ↤ $\frac{س}{3}$ − $\frac{1}{6}$.

4) س ↤ $\frac{3}{2}$ س − $\frac{1}{2}$

5) س ↤ − 5 س + 2

6) س ↤ $\frac{2}{5}$ س + $\frac{1}{2}$

28. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .
أنشيء التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية :

1) س ↤ | س − 1 |
2) س ↤ | 2 − س |
3) س ↤ | 2 س + 3 |
4) س ↤ | س | + 3
5) س ↤ − | 2 س | + 1
6) س ↤ | 3 س | − 2
7) س ↤ $\sqrt{(س - 1)^2} + \sqrt{س^2}$
8) س ↤ $\sqrt{(س + 1)^2}$ + | س − 2 |

29. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .
ي (س) هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي س
أنشيء التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية :

1)] − 3 ، 3 [← ح
س ↤ ي (س)

2)] − 3 ، 3 [← ح
س ↤ 2 س − ي (ى)

3)] − 3 ، 3 [← ح
س ↤ $-\frac{5}{2}$ س + ي (س) .

30. المستوي منسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس .
(Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ، (Δ_4) ، (Δ_5) ، (Δ_6) مستقيمات معادلاتها ، على الترتيب :

1) ع = − س + 1
2) ع = 2 س + 3
3) ع = − 2 س
4) ع = $\frac{1}{2}$ س + 1
5) ع = $-\frac{1}{2}$ س + 2
6) ع = 2 س + 5

أذكر، من بين هذه المستقيمات، المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

31. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

(△) مستقيم معادلته ع = 2 س + 5.

عيّن، في كل حالة من الحالات التالية، دالة تآلفية بحيث تمثيلها البياني:

1) يشمل النقطة أ (− 2 ، 1) وَ يوازي (△)

2) يشمل النقطة ب (− 1 ، 0) وَ يعامد (△).

3) يكون نظير (△) بالنسبة إلى محور الفواصل.

4) يكون نظير (△) بالنسبة إلى محور الترتيب.

32. أ ب حـ مثلث. أقياس أضلاعه، بالسنتيمترات هي:

أ ب = 5 ؛ أ حـ = 8 ؛ ب حـ = س.

ارسم التمثيل البياني للدالة س ↤ م (س) حيث

م (س) هو محيط المثلث أ ب حـ.

33. (△) مستقيم وَ (م ، $\overleftarrow{و}$) معلم له.

أ ، ب ، ﻫ ثلاث نقط من (△) فواصلها (− 2) ، (+ 1) ، (س) على الترتيب.

1) أُحسب الأعداد الحقيقية تا (س) ، ها (س) ، عا (س) ، طا (س)

حيث: تا (س) = ﻫ أ + ﻫ ب ؛ ها (س) = ﻫ أ − ﻫ ب

عا (س) = ﻫ أ + ﻫ ب ؛ طا (س) = ﻫ أ − ﻫ ب

2) هل الدوال التالية تآلفية:

س ↤ تا (س) ؛ س ↤ ها (س) ؛ س ↤ عا (س)

س ↤ طا (س).

34. نعتبر الدالتين الخطيتين، تا : س ↤ أ س

ها : س ↤ أ′ س

نسمي (△) وَ (△′) التمثيلين البيانيين للدالتين تا ، ها ، على الترتيب ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$).

أثبت أن (△′) يكون نظير (△) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل إذا وفقط إذا كان

أ + أ′ = 0

35. المستوي منسوب إلى معلم متعامد (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

(Δ) وَ (Δ′) مستقيمان معادلتاهما ، على الترتيب ،

ع = ا س + ب   وَ   ع = ا′ س + ب′ .

كيف نختار الاعداد الحقيقية ا ، ا′ . ب ، ب′ حتى يكون (Δ′) نطير (Δ) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

الدالة : س ↤ ا س^2 + ب س + حـ (ا $\neq$ 0)

36. تا هي الدالة : س ↤ 4 س^2 + 7 س + 5

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب س يكون تا (س) > 4 س^2

2) أوجد عددا حقيقيا موجبا ا بحيث :

إذا كان س أكبر من ا فإن تا (س) > 10^{20}

37. تا هي الدالة : س ↤ س^2 + 5 س − 8

1) بيّن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي س أكبر من 2 يكون تا (س) > س^2

2) أوجد عددا حقيقيا موجبا ا بحيث :

إذا كان س أصغر من (− ا) فإن تا (س) > 10^{8} .

38. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

شكل جدول تغيرات كل من الدوال التالية وأنشيء تمثيلاتها البيانية

1) س ↤ س^2 2) س ↤ 2 س^2

3) س ↤ $\frac{1}{2}$ س^2 4) س ↤ − $\frac{1}{3}$ س^2

5) س ↤ − 3 س^2 6) س ↤ 2 س^2 + 3 س − 5

39. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{م ا}$ ، $\overleftarrow{م ب}$). نضع : $\overleftarrow{م ا}$ = $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ = $\overleftarrow{ي}$

شكل جدول تغيرات الدالة : س ↤ س^2 + 2 س − 3 ثم أنشيء تمثيلها البياني في كل حالة من الحالات التالية

1) (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) معلم متعامد متجانس

2) $\|\vec{و}\| = \|\vec{ي}\|$ و $\widehat{أمب} = 60°$

3) $\|\vec{و}\| = 2\|\vec{ي}\|$ و (م أ) ⊥ (م ب)

فيما يلي المستوى منسوب إلى المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$)

40. شكل جدول تغيرات كل من الدوال التالية وأنشيء تمثيلاتها البيانية

1) ح ← ح

س ↦ س^2 − 4 س + 1

2) ح ← ح

س ↦ 4 س^2 − 4 س + 1

3) ح ← ح

س ↦ − س^2 − 2 س + 2

41. اُدرس كلّ دالة من الدوال التالية ثم أنشيء تمثيلها البياني

1) ح ← ح

س ↦ |س|^2 − 3 |س| + 2

2) ح ← ح

س ↦ | س^2 + س |

3) ح ← ح

س ↦ | س^2 − س + 1 |

4) ح ← ح

س ↦ | − 2 س^2 − س + 4 |

5) ح ← ح

س ↦ $\sqrt{(\text{س}^2 + 2\,\text{س})^2}$ + | س − 1 |

42. α عدد حقيقي و (ك) المنحني الممثل للدالة : س ↦ س^2 − α س + 1

عين α حتي تنتمي النقطة أ(1 ، 4) إلى المنحني (ك) ثم أنشيء (ك)

43. α ، β عددان حقيقيان و (ك) المنحني الممثل للدالة :

س ↤ α س^2 + β (س^2 − س) + 1

عين α و β حتى تنتمي النقطتان أ (1 ، 2) و ب (2 ، − 1) إلى المنحني (ك)

ثم أنشيء (ك)

44. α ، β ، δ أعداد حقيقية و (ك) المنحني الممثل للدالة :

س ↤ α س^2 + β س + δ

عين α ، β ، δ حتى تنتمي النقط أ (1 ، 2) ، ب (− 1 ، − 2)

وَ جـ (− 3 ، 2) إلى المنحني (ك) . ثم أنشيء (ك)

45. α ، β ، δ أعداد حقيقية و (ك) المنحني الممثل للدالة :

س ↤ α س^2 + β س + δ

عين α ، β ، δ حتى تنتمي النقط أ (− 1 ، − 6) ، ب (1 ، 4)

وَ جـ (2 ، − 3) إلى المنحني (ك) . ثم أنشيء (ك)

46. تا وَ ها دالتان معرفتان كما يلي

تا : ح ← ح　　　　ها : ح ← ح

س ↤ س^2 − 4　　　　س ↤ س − 2

(ك) المنحني الممثل للدالة تا ، (Δ) المستقيم الممثل للدالة ها

عين إحداثيات نقط تقاطع (ك) وَ (Δ)

أنشيء (ك) وَ (Δ)

47. تا وَ ها دالتان معرفتان كما يلي :

تا : ح ← ح　　　　ها : ح ← ح

س ↤ س^2 + 2 س − 3　　　　س ↤ − س^2 − 3 س + 4

(ك) المنحني الممثل للدالة تا ، (ل) المنحني الممثل للدالة ها

1) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (ك) مع الحاملين (س′س) و (ع′ع) للمحورين

2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (ل) مع (س′س) وَ (ع′ع)

3) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (ك) وَ (ل)

48. (ك) المنحني الممثل للدالة : تا : س ↦ س^2 – 2 س – 8

1) أكتب كثير الحدود تا (س) على شكله النموذجي

2) م′ نقطة إحداثياها (1 ، – 9) في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

أكتب معادلة المنحني (ك) بالنسبة إلى المعلم (م′ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

49. ط عدد حقيقي وَ هاط الدالة :

س ↦ ط س^2 – 2 (ط + 1) س + ط + 3

1)• عيّن مجموعة قيم ط بحيث تقبل المعادلة هاط (أ) 0 حلا واحدا

• عيّن مجموعة قيم ط بحيث يكون هاط (2) = 0 أو هاط $\left(\frac{3}{2}\right)$ 0

• عيّن مجموعة قيم ط حتى يكون هاط (1) = 0

2) عيّن ، حسب قيم العدد الحقيقي ك ، مجموعة الأعداد الحقيقية ط التي من أجلها تقبل الدالة هاط قيمة صغرى تساوي ك

3)• أنشيء المنحنيين الممثلين للدالتين ها$_0$ وَ ها$_{(-1)}$

• بيّن أن لهذين المنحنيين نقطة مشتركة يطلب حساب إحداثيها

4) أثبت أن المنحني الممثل للدالة هاط يشمل نقطة إحداثياها مستقلان عن د

50. [م ك ، م ل] زاوية قائمة ، ج نقطة متغيرة من [م ك) تختلف عن م . أ نقطة ثابتة من [م ل) بحيث م أ = 4

(وحدة الطول هي السنتيمتر)

الدائرة التي تشمل النقطة أ وتمس المستقيم (م ك) في النقطة ج تقطع [م ل) في النقطة ب .

نضع م ج = س وَ م ب = ع

1) قارن بين الزاويتين [ج أ ، ج م] وَ [ب ج ، ب م]

2) بيّن أن : س^2 = 4 ع

3) شكل جدول تغيّرات الدالة : س ↦ ع ثم أنشيء تمثيلها البياني

51. 1) أنشيء القطع المكافيء (ك) الذي معادلته : $ع = \frac{س^{2}}{2}$

2) ط عدد حقيقي حيث $ط > -\frac{1}{2}$

يتقاطع المنحني (ك) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته ع س ط في النقطتين هـ وَ هـ′

أحسب بدلالة ط إحداثيي النقطة ي منتصف القطعة [هـ هـ′]

عيّن مجموعة النقط ي عندما يتغير ط في المجال $]-\frac{1}{2}\ ،\ +\infty[$

52. إذا سقط حجر سقوطا حرا فإنه يقطع في زمن ز مسافة قدرها 4.8 ز²

1) ما هو الزمن الذي استغرقه هذا الحجر إذا قطع في سقوطه 176.4م؟

2) ما هي المسافة التي قطعها هذا الحجر إذا استغرق في سقوطه زمنا قدره 7 ثا .

الدالة : $س \mapsto \frac{أ}{س}$ $(أ \neq 0)$

53. تا هي الدالة $س \mapsto \frac{5}{2\,س}$

1) أوجد عددا حقيقيا موجبا α بحيث يكون

$س > \alpha \Leftarrow 0 < تا\,(س) < 10^{-9}$

2) أوجد عددا جقيقيا موجبا β بحيث يكون

$س < -\beta \Leftarrow -10^{-9} < تا\,(س) < 0$

54. تا هي الدالة $س \mapsto -\frac{2}{5\,س}$

أوجد عددين حقيقيين موجبين α وَ β بحيث

1) $-\alpha < س < 0 \Leftarrow تا\,(س) > 10^{7}$

2) $0 < س < \beta \Leftarrow تا\,(س) < -10^{7}$

55. أُدرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ثم أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

1) $س \mapsto \frac{-2}{س}$ 2) $س \mapsto \frac{1}{2س}$ 3) $س \mapsto \frac{-2}{3س}$

4) $س \mapsto \frac{3}{س}$ 5) $س \mapsto \frac{4}{3س}$ 6) $س \mapsto \frac{2.1}{س}$

56. أُدرس وَ مثل بيانيا كلا من الدوال التالية

1) $س \mapsto \frac{1}{|س|}$ 2) $س \mapsto \frac{-2}{|س|}$ 3) $س \mapsto \frac{3}{2\sqrt{س^2}}$

57. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

(Δ) وَ (γ) هما التمثيلان البيانيان للدالتين

تا : $س \mapsto -س + 3$ ؛ ها : $س \mapsto \frac{2}{س}$

1) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (Δ) وَ (γ)

2) أنشيء في المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$ (Δ) وَ (γ)

58. نفس الأسئلة إذا كان :

تا : $س \mapsto 2س + 1$ ؛ ها : $س \mapsto \frac{-1}{س}$

59. نفس الأسئلة إذا كان :

تا : $س \mapsto 2س + 1$ ؛ ها : $س \mapsto \frac{1}{|س|}$

60. أُدرس وَمثل بيانيا الدالة المعرفة كما يلي :

تا $(س) = \frac{2}{س}$ إذا كان $س < 0$

وَ تا $(0) = 0$

وَ تا $(س) = س + 1$ إذا كان $س > 0$

61. 1) أنشيء ، في المستوي المنسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) المنحني (γ) الممثل

للدالة : س ↦ $\frac{1}{2\text{ س}}$

2) ط عدد حقيقي أكبر من 1 . (ق) مستقيم معادلته ع = $\frac{\text{س}}{2}$ + ط

عيّن إحداثيات نقط تقاطع (γ) وَ (ق)

3) نسمي أ و ب نقطتي تقاطع (γ) وَ (ق)

عيّن إحداثيي النقطة ي منتصف [أ ب]

ما هي مجموعة النقط ي عندما يتغير ط في المجال] 1 ، + ∞ [

62. 1) المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

عيّن العددين الحقيقيين α وَ β حتى تنتمي النقطتان أ(− 1 ، 3)

و ب $\left(\frac{1}{2} \text{ ، } -3\right)$ إلى المنحني (γ) الذي معادلته

ع = $\frac{\alpha}{\text{س}}$ + β

نقطة إحداثياها (0 ، i) في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

2) أُكتب معادلة المنحني (γ) في المعلم (ه ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

3) أنشيء (γ) في المعلم (ه، $\overleftarrow{و}$، $\overleftarrow{ي}$)

63. أ ، ب ، حـ ثلاث نقط متغيرة في المستوي بحيث تكون هذه النقط رؤوس مثلث مساحته م²

نحسب ، بالأمتار ، الطول ع للضلع [أ ب] بدلالة الطول س للعمود المتعلق بالضلع [أ ب]

ادرس الدالة س ↦ ع وَ أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

64. (ى) نصف دائرة قطرها [ا ب] حيث ا ب = 6 (يؤخذ السنتيمتر وحدة للأطوال)
(Δ_1) وَ (Δ_2) هما المماسان للقوس (ى) في النقطتين ا ، ب على الترتيب .
ن نقطة متغيرة على (ى) مختلفة عن ا وَ ب .
المماس (Δ) للقوس (ى) في النقطة ن يقطع المماسين (Δ_1) وَ (Δ_2)
في النقطتين ك ، ل على الترتيب
نضع ا ك = س ، ب ل = ع
1) بيّن أن : س ع = 9
2) شكل جدول تغيرات الدالة س ↤ ع وَ أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

65. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) . حاملا محوريه (س′ س) وَ (ع′ ع)
ط عدد حقيقي غير معدوم
س ع = 6 معادلة قطع زائد ؛ ن ، هـ نقطتان متمايزتان من هذا القطع الزائد.
فاصلتاهما 3 ط ، $\frac{3}{2\text{ ط}}$ على الترتيب
1) عيّن معادلة للمستقيم (ن هـ)
2) نسمي ا وَ ب نقطتي تقاطع المستقيم (ن هـ) مع (س′ س) وَ (ع′ ع)
أثبت أن للقطعتين [ا ب] و [ن هـ] نفس المنتصف ي وأن النقطة ي تتغير على مستقيم ثابت عندما يتغير ط في ح*

66. تحت درجة حرارة ثابتة ، جداء الضغط ض في الحجم ح لكتلة غازية معلومة ثابت
تملأ هذه الكتلة ، تحت درجة حرارة التجربة ، حجما قدره 30 سم^3 وتحت ضغط 1 بار
أُدرس الدالة ح ↤ ض وَ أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

الباب التاسع
التحويلات النقطية

يعالج في هذا الباب موضوع التحويلات النقطية في المستوي وهو خاص بشعبتي الرياضيات والرياضيات التقنية .

يكتشف التلميذ من خلال هذه الدراسة وجها جديداً للهندسة ووسائل تساعده في حل عدة مسائل هندسية (دراسة أشكال هندسية ، البحث عن مجموعة نقط ، الإنشاءات الهندسية ...) .

32	التحويلات النقطية في المستوي التناظر بالنسبة إلى مستقيم

1 ـ التحويلات النقطية في المستوي .

1.1 تعريف

نسمي تحويلا نقطيا في المستوي كل تطبيق لمجموعة نقط من المستوي في مجموعة نقط من المستوي .

• إذا كانت ن′ صورة ن بالتحويل ل نكتب : ن′ = ل (ن) ونقول إن النقطة ن′ هي محوَّلة النقطة ن بالتحويل ل .

• إذا كانت (γ) مجموعة نقط ن فإن مجموعة النقط ن′ التي هي صور النقط ن بالتحويل ل تسمى صورة (γ) أو محوّل (γ) بالتحويل ل .

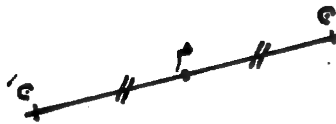
• إذا كان ل تطبيقا تقابليا نقول إن ل تحويل نقطي تقابلي وإن التطبيق ل$^{-1}$ هو التحويل العكسي للتحويل ل

ويكون لدينا :

ن′ = ل (ن) ⟸⟹ ن = ل$^{-1}$ (ن′)

أمثلة :

1) م نقطة من المستوي .



التناظر بالنسبة إلى النقطة م تحويل نقطي .

فهو تطبيق للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة ن النقطة ن′ بحيث تكون النقطة م منتصف القطعة [ن ن′] .

هذا التحويل تقابلي .

2) (ق) و (Δ) مستقيمان متقاطعان من المستوي .

الإسقاط على (ق) وفق منحى (Δ) تحويل نقطي . فهو تطبيق للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة ن النقطة ن′ التي هي نقطة تقاطع المستقيم (ق) مع المستقيم الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ن .

هذا التحويل غير متباين وغير غامر .

3) المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) ؛

التطبيق للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′) حيث [س′ = س + 1 وَ ع′ = ع − 2]

تحويل نقطي .

لدينا :

$$\begin{cases} س' = س + 1 \\ ع' = ع - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} س = س' - 1 \\ ع = ع' + 2 \end{cases}$$

وهذا يعني أن هذا التحويل تقابلي وَ تحويله العكسي هو التطبيق للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة ن′ (س′ ، ع′) النقطة ن (س ، ع) حيث [س = س′ − 1 وَ ع = ع′ + 2]

4) التطبيق المطابق للمستوى الذي يرفق بكل نقطة ن النقطة ن نفسها تحويل نقطي .

يسمى هذا التطبيق التحويل المطابق وهو تقابلي .

5) π مستو أختيرت عليه واحدة للأطوال .
م نقطة من π ؛ ك عدد حقيقي غير معدوم ؛ و π* مجموعة نقط π باستثناء النقطة م .
التطبيق من π* في نفسه الذي يرفق بكل نقطة ۻ النقطة ۻ′ حيث م ۻ . م ۻ′ = ك تحويل نقطتي يسمى تعاكسا .
وهو تحويل تقابلي للمجموعة π* في نفسها .

2.1 ـ التحويل التضامني :

يكون التحويل النقطي تا تضامنيا إذا وفقط إذا كان تا تقابليا ومساويا تحويله العكسي تا$^{-1}$.

إذن :

إذا كان تا تحويلا نقطيا تقابليا فإن :

تا تضامني ⟸ تا = تا$^{-1}$

أمثلة :

التناظر بالنسبة إلى نقطة تحويل تضامني .
التحويل المطابق تحويل تضامني .
التعاكس تحويل تضامني .

3.1 ـ تركيب تحويلين نقطيين :

تا وَ ها تحويلان نقطيان في المستوي .
التحويل المركب من التحويلين تا و ها ، بهذا الترتيب ، هو التطبيق المركب ها ∘ تا .
نعلم أن (ها ∘ تا) (ۻ) = ها [تا (ۻ)]

ۻ $\xrightarrow{\text{تا}}$ ۻ′ = تا (ۻ) $\xrightarrow{\text{ها}}$ ۻ″ = ها (ۻ′) = ها [تا (ۻ)]

(ها ∘ تا : من ۻ إلى ۻ″)

4.1 ـ التقايس :

التقايس هو تحويل نقطي يرفق بكل ثنائية نقطية (ﻫ$_1$ ، ﻫ$_2$) الثنائية النقطية (ﻫ$'_1$ ، ﻫ$'_2$) حيث :

$$ﻫ_1 ﻫ_2 = ﻫ'_1 ﻫ'_2$$

نقول إنه يحافظ على المسافات .

مثال :

التحويل المطابق وَ التناظر بالنسبة إلى نقطة هما تقايسان .

5.1 ـ النقط الصامدة :

تكون نقطة ﻫ صامدة في تحويل نقطي ل إذا وفقط إذا انطبقت ﻫ على صورتها

ﻫ صامدة بالتحويل ل ⟺ ل (ﻫ) = ﻫ

- النقط الصامدة تدعى أيضا النقط المضاعفة .

مثال :

- النقط الصامدة في الإسقاط العمودي على المستقيم (ق) هي نقط المستقيم (ق)
- النقطة م هي النقطة الصامدة الوحيدة في التناظر بالنسبة إلى م
- كل نقطة من المستوي صامدة في التحويل المطابق .

6.1 ـ تمرين محلول

المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$.

تا تحويل نقطي. يرفق بكل نقطة ه $(س ، ع)$ النقطة ه' $(س' ، ع')$ حيث : $س' = 3ع - 2س$ وَ $ع' = ع$

1) أثبت أن التحويل تا تقابلي وأوجد تحويله العكسي $تا^{-1}$.

2) عيّن مجموعة النقط الصامدة في التحويل تا .

3) (Δ) مستقيم معادلته $ع = 2س + 1$.

ما هي صورة (Δ) بالتحويل تا ؟.

1) لدينا :

$$\begin{cases} س' = 3ع - 2س \\ ع' = ع \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} س = \frac{1}{2}(-س' + 3ع') \\ ع = ع' \end{cases}$$

إذن كل نقطة ه' $(س' ، ع')$ لها سابقة واحدة بالتحويل تا هي النقطة ه $(س ، ع)$ حيث :

$$س = \frac{1}{2}(-س' + 3ع') \text{ وَ } ع = ع'$$

التحويل تا تقابلي وتحويله العكسي هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة ه' $(س' ، ع')$ النقطة ه $(س ، ع)$ حيث :

$$س = \frac{1}{2}(-س' + 3ع') \text{ وَ } ع = ع'$$

2) ه $(س ، ع)$ صامدة $\Leftrightarrow$ تا (ه) = ه

$$\Leftrightarrow \begin{cases} س = 3ع - 2س \\ ع = ع \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ع = س$$

إذن مجموعة النقط الصامدة في التحويل تا هي مجموعة نقط المستقيم ذي المعادلة ع = س .

3) م (س ، ع) نقطة كيفية من المستوي صورتها مَ (سَ ، عَ)

نعلم أن : $\text{س} = \frac{1}{2}\left(-\text{س}' + 3\text{ع}'\right)$ وَ ع = عَ

لدينا :

$$\text{ع} = 2\,\text{س} + 1 \Leftrightarrow \text{ع}' = 2\left[\frac{1}{2}\left(-\text{س}' + 3\text{ع}'\right)\right] + 1$$

$$\Leftrightarrow \text{ع}' = +\frac{1}{2}\left(\text{س}' - 1\right)$$

إذن صورة المستقيم الذي معادلته ع = 2 س + 1 هي المستقيم (Δ') الذي معادلته $\text{ع} = \frac{1}{2}\left(\text{س} - 1\right)$.

2 ـ التناظر بالنسبة إلى مستقيم :

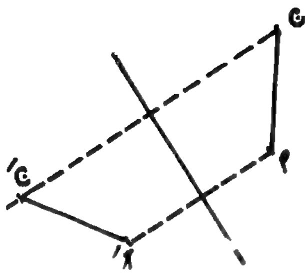
1.2 ـ تعريف وَ خواص :

(ف) مستقيم في المستوي

> التناظر بالنسبة إلى المستقيم (ف) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة م النقطة مَ بحيث يكون المستقيم (ف) محور القطعة [م مَ]

- التناظر بالنسبة إلى مستقيم هو تحويل تقابلي وبالإضافة إلى ذلك فهو تضامني .

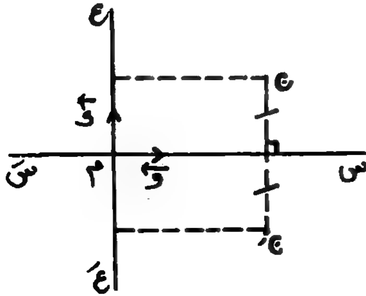
• النقط الصامدة في التناظر بالنسبة إلى مستقيم (ق) هي نقط المستقيم (ق)



• التناظر بالنسبة إلى مستقيم يحافظ على المسافات . إنه تقايس .

2.2 ـ التعريف التحليلي :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس حاملا محوريه (سَ س) وَ (عَ ع) .



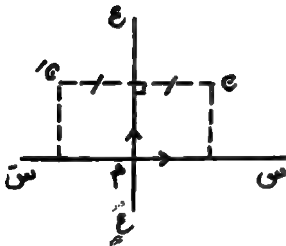
• من الواضح أن :

التناظر بالنسبة إلى المستقيم (سَ س) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة

ن (س ، ع) النقطة نَ (سَ ؛ عَ)

حيث :

$$سَ = س \quad وَ \quad عَ = - ع$$



التناظر بالنسبة إلى المستقيم (عَ ع) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة

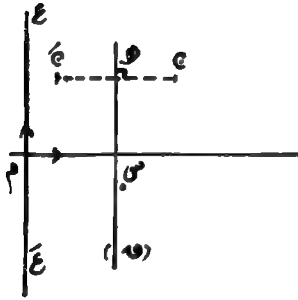
ن (س ، ع) النقطة نَ (سَ ؛ عَ)

حيث :

$$سَ = - س \quad وَ \quad عَ = ع$$

• التناظر بالنسبة إلى مستقيم (ق) يوازي (ع′ع)

لتكن س = $س_0$ معادلة (ق).



تكون النقطة ن′(س′ ؛ ع′) صورة النقطة ن(س ، ع) في التناظر بالنسبة إلى (ق) إذا وفقط إذا كان المستقيم (ق) محور القطعة [ن ن′] وهذا يعني أن النقطة ه($س_0$ ، ع) هي منتصف القطعة [ن ن′]

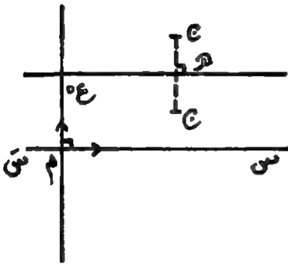
أي : $\frac{1}{2}$(س + س′) = $س_0$ وَ $\frac{1}{2}$ (ع + ع′) = ع

أي س′ = 2 $س_0$ − س وَ ع′ = ع

• التناظر بالنسبة إلى مستقيم (ق) يوازي (س′س)

لتكن ع = $ع_0$ معادلة (ق).

تكون النقطة ن′(س′ ؛ ع′) صورة النقطة ن(س ، ع) في التناظر بالنسبة إلى (ق) إذا وفقط إذا كان المستقيم (ق) محور القطعة [ن ن′] وهذا يعني أن النقطة ه(س ، $ع_0$) هي منتصف القطعة [ن ن′]



أي : $\frac{1}{2}$(س + س′) = س و $\frac{1}{2}$(ع + ع′) = $ع_0$

أي : س = س′ وَ ع′ = 2$ع_0$ − ع

3.2 ـ صور بعض الأشكال الهندسية :

التناظر بالنسبة إلى مستقيم (ﻫ) هو تقايس .

لذلك فإن صورة أي شكل هندسي هو شكل هندسي يقايسه .

• **صورة قطعة مستقيم :**

صورة القطعة [ا ب] هي القطعة [ا′ ب′]

حيث ا′ و ب′ هما صورتا ا و ب .

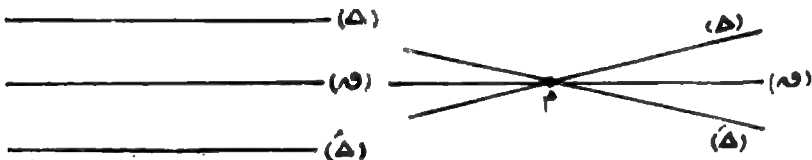
• **صورة دائرة :**

صورة دائرة (ى) هي دائرة (ى′) تقايسها ومركز (ى′) هو صورة مركز (ى)

• **صورة مستقيم :**

صورة مستقيم (Δ) هي مستقيم (Δ′).

يكون المستقيمان (Δ) و (Δ′) متوازيين إذا كان (Δ) و (ﻫ) متوازيين ويكون (Δ) و (Δ′) متقاطعين في النقطة م من (ﻫ) إذا كان (Δ) قاطعاللمستقيم (ﻫ) في م .



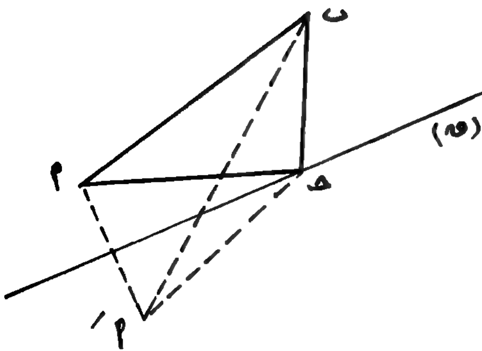
(Δ) و (Δ′) يحققان المساواة التالية :

$$(\overline{\Delta \,;\, ﻫ}) = (\overline{ﻫ \,;\, \Delta'})$$

4.2 تمرين محلول

ا و ب نقطتان ثابتتان من نفس نصف المستوي المحدد بالمستقيم (ه) . ح نقطة من (ه) .
عيّن النقطة ح حتي يكون للمثلث ا ب ح أصغر محيط ممكن .

يكون للمثلث ا ب ح أصغر محيط ممكن إذا وفقط إذا كانت للمجموع (ا ح + ح ب) أصغر قيمة ممكنة .



لتكن ا' نظيرة النقطة ا بالنسبة إلى المستقيم (ه) .

لدينا : ا ح = ا' ح

ومنه :

ا ح + ح ب = ا' ح + ح ب

نعلم أن أصغر قيمة للمجموع (ا' ح + ح ب) هي التي نحصل عليها عندما تكون النقط ا' ، ح ، ب على إستقامة واحدة .

إذن :

يكون للمثلث ا ب ح أصغر محيط ممكن عندما تكون النقط ا' ، ب ، ح على إستقامة واحدة .

33 الانسحاب والتحاكي

1 ـ الانسحاب :

1.1 ـ تعريف وخواص :

$\overrightarrow{\text{ش}}$ شعاع للمستوي

> الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق ، بكل نقطة م من المستوي ، النقطة م′ من المستوي بحيث : $\overrightarrow{\text{م م}'} = \overrightarrow{\text{ش}}$

من التعريف نستنتج الخواص التالية

1) النقط الصامدة بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}}$ هي النقط م التي تحقق $\overrightarrow{\text{م م}} = \overrightarrow{\text{ش}}$

إذا كان $\overrightarrow{\text{ش}} \neq \vec{0}$ فلا توجد أية نقطة صامدة

إذا كان $\overrightarrow{\text{ش}} = \vec{0}$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة .

الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل المطابق .

2) من التكافؤ $\overrightarrow{\text{م م}'} = \overrightarrow{\text{ش}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{م}'\text{م}} = -\overrightarrow{\text{ش}}$ نستنتج أن لكل نقطة م′ من المستوي سابقة وحيدة م بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}}$ وهذا يعني أن كل انسحاب هو تحويل تقابلي والتحويل العكسي للانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}}$ هو الانسحاب الذي شعاعه $(-\overrightarrow{\text{ش}})$

3) إذا كانت ا′ و ب′ صورتي النقطتين ا و ب بانسحاب شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}}$ فإن :

$\overrightarrow{\text{ا ا}'} = \overrightarrow{\text{ب ب}'} = \overrightarrow{\text{ش}}$

من المساواة $\overrightarrow{\text{ا ا}'} = \overrightarrow{\text{ب ب}'}$ نستنتج $\overrightarrow{\text{ا ب}} = \overrightarrow{\text{ا}'\text{ب}'}$

إذن :

صورة كل ثنائية نقطية (ا ، ب) بانسحاب هي ثنائية نقطية (ا′ ، ب′) حيث $\overrightarrow{\text{ا ب}} = \overrightarrow{\text{ا}'\text{ب}'}$

ومن المساواة $\overrightarrow{\text{اب}} = \overrightarrow{\text{ا}'\text{ب}'}$ نستنتج $\text{اب} = \text{ا}'\text{ب}'$

إذن الانسحاب تحويل نقطي يحافظ على المسافات إنه تقايس

2.1 ـ التعريف التحليلي :

المستوي منسوب إلى معلم $(\text{م} ، \overrightarrow{\text{و}} ، \overrightarrow{\text{ي}})$

$\overrightarrow{\text{ش}}(\alpha ، \beta)$ شعاع للمستوي

نعلم أنه إذا كانت $\text{ن}'(\text{س}' ، \text{ع}')$ صورة النقطة $\text{ن}(\text{س} ، \text{ع})$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{ن ن}'} = \overrightarrow{\text{ش}}$ وهذا يعني أن

$$\begin{cases} \text{س}' - \text{س} = \alpha \\ \text{و} \\ \text{ع}' - \text{ع} = \beta \end{cases}$$

لأن مركبتي $\overrightarrow{\text{ن ن}'}$ هما $\begin{pmatrix} \text{س}' - \text{س} \\ \text{ع}' - \text{ع} \end{pmatrix}$

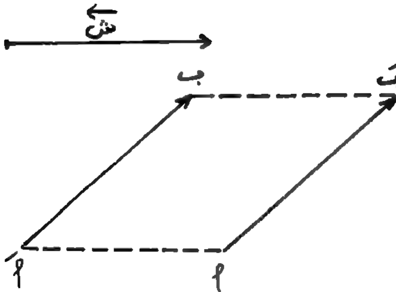
إذن :

الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}}(\alpha ، \beta)$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $\text{ن}(\text{س} ، \text{ع})$ النقطة $\text{ن}'(\text{س}' ، \text{ع}')$ بحيث يكون :

$$\boxed{\text{س}' = \text{س} + \alpha \quad \text{و} \quad \text{ع}' = \text{ع} + \beta}$$

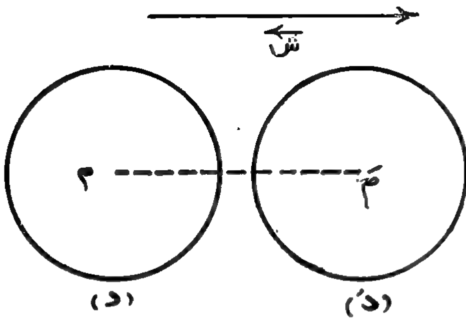
3.1 ـ صور بعض الأشكال الهندسية :

بما أن الانسحاب تقايس فإن صورة كل شكل هندسي هي شكل هندسي يقايسه



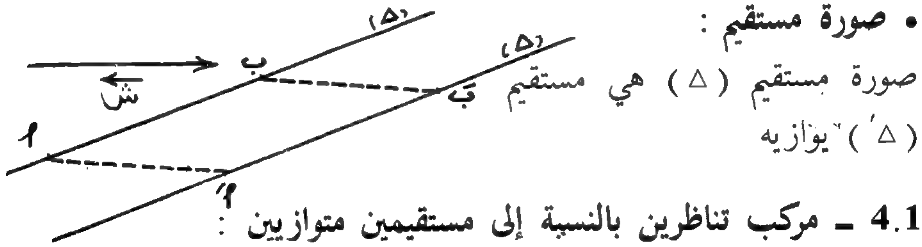
- **صورة قطعة مستقيم**

صورة القطعة [ا ب] هي القطعة [ا' ب'] حيث ا' و ب' هما صورتا ا و ب و $\overrightarrow{\text{اب}} = \overrightarrow{\text{ا}'\text{ب}'}$



• **صورة دائرة :**

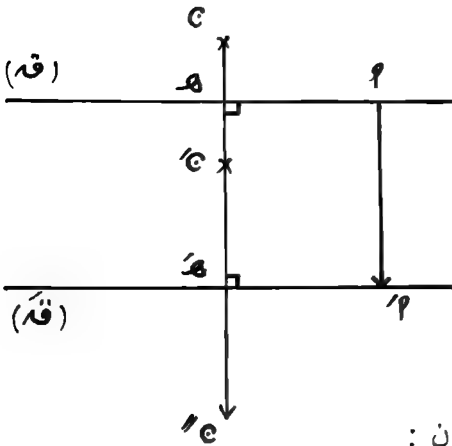
صورة دائرة (ى) هي دائرة (ىَ) تقايسها ومركز (ىَ) هو صورة مركز (ى)



• **صورة مستقيم :**

صورة مستقيم (Δ) هي مستقيم (Δَ) يوازيه

4.1 ـ مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متوازيين :



(ق) ، (قَ) مستقيمان متوازيان أ نقطة من (ق) وَ أَ مسقطها العمودي على (قَ) . الشعاع $\overleftarrow{أأَ}$ شعاع ثابت (الشكل)

تا التناظر بالنسبة إلى المستقيم (ق) وتاَ التناظر بالنسبة إلى المستقيم (قَ). لندرس التحويل المركب تاَ ∘ تا. إذا كانت ن نقطة من المستوي و نَ صورتها بالتناظر تا فإن :

$\overleftarrow{ن نَ} = 2\, \overleftarrow{هـ نَ}$ (1) حيث هـ هي المسقط العمودي للنقطة ن على (ق) وَكذلك إذا كانت نً صورة نَ بالتناظر تاَ فإن

$\overleftarrow{نَ نً} = 2\, \overleftarrow{نَ هـَ}$ (2) حيث هـَ هي المسقط العمودي للنقطة نَ على (قَ) . . .

من (1) وَ (2) نستنتج أن : $\overleftarrow{ن نَ} + \overleftarrow{نَ نً} = 2\,(\overleftarrow{هـ نَ} + \overleftarrow{نَ هـَ})$

أي $\overleftarrow{ن نً} = 2\, \overleftarrow{هـ هـَ}$

لدينا :

$\overrightarrow{هـ هـ'} = \overrightarrow{أ أ'}$ لأنه من الواضح أن الرباعي أ أ' هـ' هـ مستطيل

إذن :

التحويل تا' ∘ تا المركب من التناظرين تا و تا' هو تحويل يرفق بكل نقطة ﻫ النقطة ﻫ'' حيث $\overrightarrow{ﻫ ﻫ''} = 2\overrightarrow{أ أ'}$.

فهو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{أ أ'}$

5.1 ـ تمرين محلول :

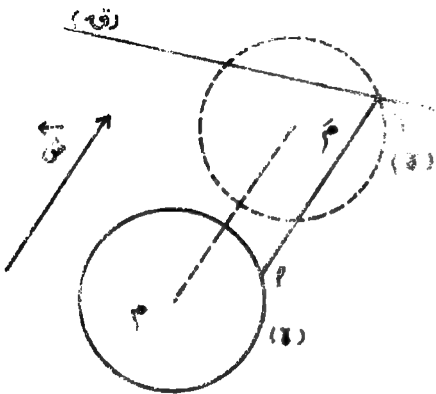
(γ) دائرة مركزها م ونصف قطرها ر . (ق) مستقيم $\overrightarrow{ش}$ شعاع .

عيّن نقطة أ من (γ) ونقطة أ' من (ق) بحيث يكون $\overrightarrow{أ أ'} = \overrightarrow{ش}$

التحليل :

نفرض أن النقطتين أ ، أ' موجودتان . من $\overrightarrow{أ أ'} = \overrightarrow{ش}$

نستنتج أن أ' هي صورة أ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{ش}$



بهذا الانسحاب صورة الدائرة (γ) هي الدائرة (γ') التي نصف قطرها ر ومركزها م' حيث $\overrightarrow{م م'} = \overrightarrow{ش}$

بما أن أ ∈ (γ) فإن أ' ∈ (γ') .

من أ' ∈ (γ') و أ' ∈ (ق) نستنتج

أن : أ' ∈ (γ') ∩ (ق) .

الانشاء :

إذا كانت المجموعتان (γ') و (ق) متقاطعتين وكانت أ' إحدى نقط تقاطعهما فإن الثنائية النقطية (أ ، أ') حيث $\overrightarrow{أ' أ} = -\overrightarrow{ش}$ هي حل للمسألة

المناقشة :

- إذا كان (ﻭ) قاطعا للدائرة (γ') فإن المسألة تقبل حلّين
- إذا كان (ﻭ) مماسا للدائرة (γ') فإن المسألة تقبل حلا واحدا
- إذا كان (ﻭ) خارج الدائرة (γ') فإن المسألة لاتقبل أي حلّ

2 ـ التحاكي :

1.2 ـ تعريف وخواص :

> م نقطة ثابتة من المستوي ، ك عدد حقيقي غير معدوم .
> التحاكي الذي مركزه م ونسبته ك هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ﻥ النقطة ﻥ′ حيث $\overleftarrow{\text{م ﻥ}'}$ = ك $\overleftarrow{\text{م ﻥ}}$

نرمز إلى التحاكي الذي مركزه م ونسبته ك بالرمز حا (م ، ك)
من التعريف نستنتج الخواص التالية

1) إذا انطبقت ﻥ على م تنطبق ﻥ′ على م وإذا اختلفت ﻥ عن م فإن النقط م ، ﻥ ، ﻥ′ على استقامة واحدة . بالإضافة إلى ذلك فإنه :

إذا كان ك > 0 تكون م خارج القطعة [ﻥ ﻥ′] وإذا كان ك < 0 تكون م بين ﻥ وَ ﻥ′

ك>0 : ﻥ ﻥ′ م

ك<0 : ﻥ م ﻥ′

2) النقط الصامدة بالتحاكي حا (م ، ك) هي النقط ﻥ التي تحقق
$\overleftarrow{\text{م ﻥ}}$ = ك $\overleftarrow{\text{م ﻥ}}$ أي (1 − ك) $\overleftarrow{\text{م ﻥ}} = \overleftarrow{0}$ (1)

إذا كان ك ≠ 1 فإن المساواة (1) تكتب $\overleftarrow{\text{م ﻥ}} = \overleftarrow{0}$ وَ النقطة م هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحاكي حا (م ، ك)

إذا كان ك = 1 فإن كل نقطة ﻥ من المستوي تحقق (1) وهذا يعني أن كلّ نقطة من المستوي صامدة بالتحاكي حا (م ، ك)

التحاكي حا (م ، 1) هو التحويل المطابق

3) بما أن $ك \neq 0$ فإن $\overleftarrow{م ﻫ'} = ك \overleftarrow{م ﻫ} \Leftrightarrow \overleftarrow{م ﻫ} = \frac{1}{ك} \overleftarrow{م ﻫ'}$

من هذا التكافؤ نستنتج أن التحاكي حا (م ، ك) تقابلي وتحويله العكسي هو التحاكي حا (م ، $\frac{1}{ك}$)

4) حسب ما سبق يكون التحاكي حا (م ، ك) تضامنيا إذا وفقط إذا كان : $\frac{1}{ك} = ك$ أي $ك^2 = 1$

أي $ك = 1$ أو $ك = -1$

التحاكي حا (م ، 1) هو التحويل المطابق

والتحاكي حا (م ، -1) هو التناظر بالنسبة إلى النقطة م

5) إذا كانت $أ'$ ، $ب'$ صورتي النقطتين أ ، ب بالتحاكي حا (م ، ك) فإن : $\overleftarrow{م أ'} = ك \overleftarrow{م أ}$

$\overleftarrow{م ب'} = ك \overleftarrow{م ب}$

من المساواتين السابقتين نستنتج

$\overleftarrow{م ب'} - \overleftarrow{م أ'} = ك \overleftarrow{م ب} - ك \overleftarrow{م أ}$

$= ك (\overleftarrow{م ب} - \overleftarrow{م أ})$

أي $\overleftarrow{أ' ب'} = ك \overleftarrow{أ ب}$

إذن :

صورة كل ثنائية (أ ، ب) بالتحاكي حا (م ، ك) هي الثنائية ($أ'$ ، $ب'$) حيث $\overleftarrow{أ' ب'} = ك \overleftarrow{أ ب}$

بالاضافة إلى ذلك فإن المساواة $\overleftarrow{أ' ب'} = ك \overleftarrow{أ ب}$ تستلزم

$أ' ب' = |ك| أ ب$ ومنه :

إذا كان $|ك| \neq 1$ فإن التحاكي حا (م ، ك) ليس تقايسا

2.2 ـ التعريف التحليلي :

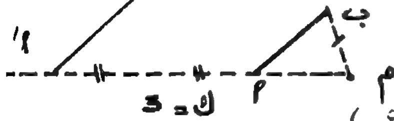
المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

$م_0(س_0 ، ع_0)$ نقطة ثابتة من المستوي . ك عدد حقيقي غير معدوم

نعلم أنه إذا كانت $ن'(س' ، ع')$ صورة النقطة $ن(س ، ع)$

بالتحاكي حا $(م_0 ، ك)$ فإن $\overleftarrow{م_0ن'} = ك \overleftarrow{م_0ن}$

وهذا يعني أن :



$$\begin{cases} س' - س_0 = ك(س - س_0) \\ و \\ ع' - ع_0 = ك(ع - ع_0) \end{cases}$$

لأن مركبتي $\overleftarrow{م_0ن'}$ هما $(س' - س_0 ، ع' - ع_0)$

ومركبتي $\overleftarrow{م_0ن}$ هما $(س - س_0 ، ع - ع_0)$

التحاكي حا (م ، ك) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $ن(س ، ع)$ النقطة $ن'(س' ، ع')$ حيث :

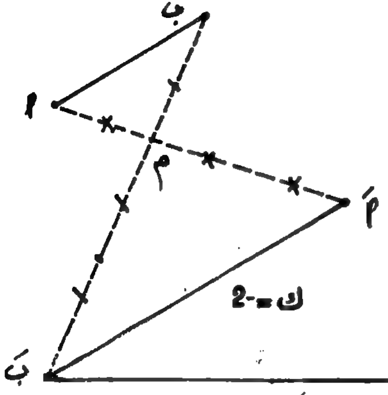
$س' - س_0 = ك(س - س_0)$ وَ $ع' - ع_0 = ك(س - س_0)$

3.2 ـ صور بعض الأشكال الهندسية :

- **صورة قطعة مستقيم :**

صورة قطعة [ا ب] هي القطعة

[ا' ب'] حيث ا' و ب' هما صورتا ا و ب



بالفعل :

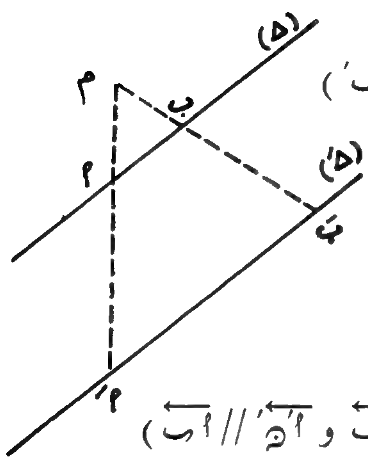
إذا كانت ن نقطة من المستوي و ن' صورتها فإن :

$ن \in [ا ب] \Leftrightarrow E\lambda \in [0 ، 1] ؛ \overleftarrow{ان} = \lambda \overleftarrow{اب}$

$\Leftrightarrow E\lambda \in [0 ، 1] ؛ \overleftarrow{ا'ن'} = \lambda . \overleftarrow{ا'ب'}$

(لأن $\overleftarrow{ا'ب'} = ك \overleftarrow{اب}$ وَ $\overleftarrow{ا'ن'} = ك \overleftarrow{ان}$)

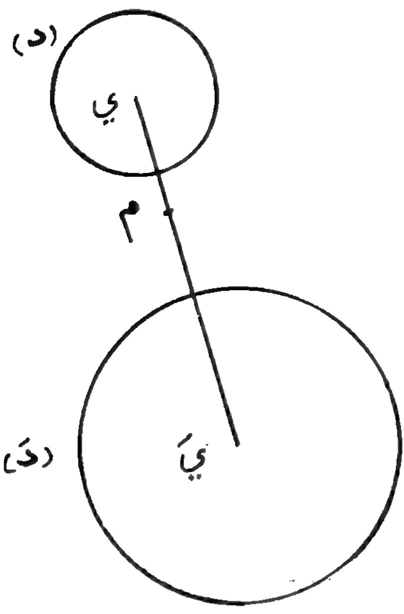
وهذا يعني أن : $ن' \in [ا'ب']$



• **صورة مستقيم**

صورة المستقيم (أب) هي المستقيم (أ'ب')
حيث أ' و ب' هما صورتا أ و ب
بالفعل :
إذا كانت ه نقطة من المستوي
و ه' صورتها فإن :

ه ∋ (أب) ⟺ $\overleftarrow{\text{أه}}$ // $\overleftarrow{\text{أب}}$
⟺ $\overleftarrow{\text{أ'ه'}}$ // $\overleftarrow{\text{أ'ب'}}$ (لأن $\overleftarrow{\text{أ'ه'}}$ // $\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{أ'ه'}}$ // $\overleftarrow{\text{أب}}$)
⟺ ه' ∋ (أ'ب')



• **صورة دائرة** :

بالتحاكي حا (م ، ك) صورة الدائرة (ى) التي نصف قطرها α ومركزها م هي الدائرة (ى') التي نصف قطرها هو | ك | α ومركزها م' حيث م' هي صورة م
بالفعل :
إذا كانت ه نقطة من المستوي و ه' صورتها فإن :

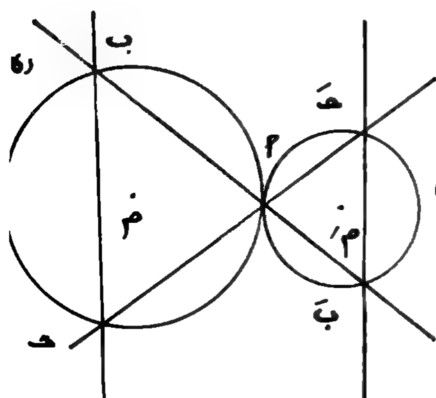
ه ∋ (ى) ⟺ م ه = α
⟺ م'ه' = | ك | α (لأن م'ه' = | ك | م ه)
⟺ ه' ∋ (ى')

تمارين محلولة :

1) (γ) و (γ') دائرتان متماستان خارجيا في النقطة ا
ب وَ ح نقطتان متمايزتان من (γ) ومختلفتان عن ا
ب' وَ ح' نقطتا تقاطع الدائرة (γ') مع المستقيمين (اب) و
(اح) على الترتيب
أثبت أن المستقيمين (ب ح) وَ (ب'ح') متوازيان

ليكن م مركز الدائرة (γ) و م' مركز الدائرة (γ')

بالتحاكي حا $\left(ا \ , \ -\frac{ام'}{ام} \right)$ صورة م هي م' وصورة (γ) هي (γ')



صورة النقطة ب من (γ) هي نقطة من (γ') على استقامة واحدة مع ب ، ا فهي إذا النقطة ب'.
كذلك صورة النقطة ح من (γ) هي نقطة من (γ') على استقامة واحدة مع ح ، ا فهي النقطة ح'
اذن :

صورة المستقيم (ب ح) بالتحاكي حا $\left(ا \ , \ -\frac{ام'}{ام} \right)$ هي المستقيم (ب'ح') ونعلم أن صورة مستقيم بتحاك هو مستقيم يوازيه :
ومنه : (ب ح) // (ب'ح')

2) (ى) دائرة و (ه) مستقيم خارج الدائرة (ى) .
ا و ب نقطتان ثابتتان من المستقيم (ه)
ى نقطة متغيرة من (ى)
عيّن مجموعة النقطة ه بحيث يكون ه مركز ثقل المثلث ا ب ى

بما أن ا ، ب ثابتتان فإن المنتصف ي للقطعة [ا ب] ثابت

نعلم أن : $\overleftarrow{\text{ي ه}} = \frac{1}{3}\,\overleftarrow{\text{ي ن}}$

إذن :

النقطة ه هي صورة النقطة ن

بالتحاكي حا $\left(\text{ي} ، \frac{1}{3}\right)$

ومجموعة النقط ه هي صورة مجموعة النقط ن فهي إذاً الدائرة (د′) صورة الدائرة (د)

بالتحاكي حا $\left(\text{ي} ، \frac{1}{3}\right)$

---

3. (ق) وَ (Δ) مستقيمان متقاطعان . م نقطة ثابتة حيث م ∉ (ق) وَ م ∉ (Δ) .

أنشيء مستقيما يشمل م ويقطع (ق) وَ (Δ) في النقطتين ن و ن′ على الترتيب وبحيث يكون : $\overleftarrow{\text{ن ن}'} = 2\,\overleftarrow{\text{م ن}}$

التحليل :

يمكن كتابة المساواة : $\overleftarrow{\text{ن ن}'} = 2\,\overleftarrow{\text{م ن}}$

كما يلي : $\overleftarrow{\text{ن م}} + \overleftarrow{\text{م ن}'} = 2\,\overleftarrow{\text{م ن}}$

ومنه : $\overleftarrow{\text{م ن}'} = 3\,\overleftarrow{\text{م ن}}$

النقطة ن′ هي إذاً صورة النقطة ن بالتحاكي حا (م ، 3)

بهذا التحاكي صورة المستقيم (ق)

هي مستقيم (ف′) يوازي

(ف) و ﻫ′ هي نقطة تقاطع

المستقيمين (Δ) وَ (ف′)

أما ﻫ فهي نقطة تقاطع المستقيمين (ف) وَ (م ﻫ′)

الإنشاء :

ننشيء المستقيم (ف′) صورة المستقيم (ف) بالتحاكي حا (م ، 3)

بما أن المستقيمين (ف) و (Δ) متقاطعان فإن (ف′) و (Δ) يتقاطعان في نقطة ﻫ′

نقطة التقاطع ﻫ للمستقيمين (ف) و (م ﻫ′) هي سابقة النقطة ﻫ′ بالتحاكي حا (م ، 3) . فهي تحقق المساواة $\overrightarrow{م ﻫ′} = 3 \overrightarrow{م ﻫ}$

وبالتالي تحقق المساواة $\overrightarrow{ﻫ ﻫ′} = 2 \overrightarrow{م ﻫ}$

إذن المسألة تقبل دوما حلاّ وحيدا .

تمـارين

التحويلات النقطية في المستوي ـ التناظر بالنسبة إلى مستقيم

1. (ق) و (△) مستقيمان من المستوي (π) متوازيان تماما. هـ نقطة من (ق).
نضع (π^*) = (π) − (ق)
تا التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ن من (π^*) نقطة تقاطع المستقيمين (ن هـ) و (△)
1) هل التحويل تا غامر؟
2) هل توجد نقط صامدة بالتحويل تا ؟

2. (ق) و (△) مستقيمان متقاطعان من المستوي
(ى) دائرة مركزها م
تا الإسقاط على (ق) وفق منحى (△)
1) أ نقطة من (ى). ما هي صورتها أ′ بالتحويل تا ؟
هل توجد نقطة أخرى من (ى) لها نفس الصورة أ′ ؟
2) ما هي صورة الدائرة (ى) بالتحويل تا ؟
ما هي صورة المركز م بالتحويل تا ؟

3. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)
تا التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′) حيث :

$$\begin{cases} س' = 2\,س + 3\,ع - 1 \\ و \\ ع' = 3\,س + 5\,ع \end{cases}$$

1) أوجد صور النقط التالية : أ (1 ، −1) ؛ ب $\left(-\frac{4}{5} ، \frac{3}{5}\right)$ ؛ حـ $\left(\frac{1}{2} ، \frac{3}{4}\right)$.

2) أثبت أن التحويل تا تقابلي . عيّن تحويله العكسي $تا^{-1}$

3) أوجد مجموعة النقط الصامدة

4. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

تا التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′) حيث :

$$\begin{cases} س' = \frac{1}{3}(س + 4ع - 4) \\ و \\ ع' = \frac{1}{3}(2س - ع + 4) . \end{cases}$$

1) بيّن أن التحويل تا تقابلي

2) بيّن أن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل تا هي مستقيم (ف)

3) ن نقطة من المستوي و ن′ صورتها بالتحويل تا

أثبت أن منتصف القطعة [ن ن′] ينتمي إلى (ف) وأن الشعاع $\overleftarrow{نن'}$ يوازي شعاعا ثابتا يطلب تعيينه

5. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

تا التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′) حيث :

$$\begin{cases} س' = -3س + 4ع - 12 \\ و \\ ع' = -\frac{3}{2}س + 2ع - 4 \end{cases}$$

1) بيّن أنه توجد نقطة صامدة وحيدة بالتحويل تا

2) أثبت أنه مهما كانت النقطة ن من المستوي فإن صورتها ن′ تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب تعيينه

3) أثبت أنه إذا كانت ن نقطة غير صامدة بالتحويل تا وَ ن′ صورتها فإن منتصف [ن ن′] ينتمي إلى مستقيم ثابت

استنتج طريقة لإنشاء النقطة ن′

6. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

تا التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′) حيث :

$$\begin{cases} س' = 2\,س + 3\,ع \\ و \\ ع' = 3\,س + 10\,ع \end{cases}$$

1) بيّن أن التحويل تا تقابلي ، عيّن تحويله العكسي

2) عيّن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل تا

3) بيّن أن مجموعة النقط ن من المستوي حيث م ، ن ، ن′ على استقامة واحدة هي اتحاد مستقيمين .

7. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

تا التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′) حيث :

$$\begin{cases} س' = 2\,س + 3\,ع \\ و \\ ع' = س + 2\,ع \end{cases}$$

ط عدد حقيقي و $\Delta_{ط}$ مستقيم معادلته ع − ط س = 0

1) بيّن أن صورة $\Delta_{ط}$ بالتحويل تا هي مستقيم $\Delta'_{ط}$ يشمل النقطة م .

أحسب بدلالة ط معامل توجه المستقيم $\Delta'_{ط}$

عيّن معادلة المستقيم $\Delta'_{ط}$ عندما يكون ط $= -\frac{2}{3}$

2) أوجد العدد الحقيقي ط الذي يكون من أجله $\Delta_{ط}$ و $\Delta'_{ط}$ متعامدين

3) عيّن قيمتي العدد ط بحيث يكون $\Delta_{ط}$ وَ $\Delta'_{ط}$ متطابقين .

8. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

أ ، ب ، حـ ، د أعداد حقيقية

تا التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′) حيث :

$$\begin{cases} س' = أ س + ب ع \\ و \\ ع' = ح س + د ع \end{cases}$$

عيّن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، ح ، د التي تكون من أجلها النقطة ك (1 ، – 1) صامدة وتكون النقطة ل′ (0 ، 2) صورة النقطة ل (2 ، 0) بالتحويل تا .

9. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) ، حاملا محوريه (س′س) و (ع′ع) .

تا التناظر بالنسبة إلى (س′س)

(△) و (△′) مستقيمان معادلتاهما على الترتيب :

س – ع = 0 و س + 2ع – 2 = 0

بيّن أنه توجد ثنائية نقطية وحيدة (ن ، ن′) بحيث يكون :

ن ∋ (△) ؛ ن′ ∋ (△′) و ن′ = تا (ن)

الانسحاب :

10. أ ب ح مثلث .

أ′ ب′ ح′ صورة أ ب ح بالانسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{أب}$.

أ″ ب″ ح″ صورة أ ب ح بالانسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{ب ح}$.

أثبت أن ح هو منتصف القطعة [أ″ ح′] .

11. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) .

تا التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ، ع′)

حيث :

س′ = س – 4 و ع′ = ع + 2 .

حدّد التحويل تا .

12. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$.

(Δ_1) وَ (Δ_2) مستقيمان معادلتاهما ، على الترتيب :

3 س + 2 ع − 5 = 0 وَ 3 س − 2 ع + 1 = 0

ما هما صورتا (Δ_1) وَ (Δ_2) بالانسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ؟

13. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$.

(Δ) و (Δ') مستقيمان معادلتاهما على الترتيب :

2 س + 3 ع = 0 وَ 4 س + 6 ع = 5

1) بيّن أن (Δ) وَ (Δ') متوازيان .

2) عيّن مركبتي الشعاع $\overleftarrow{ش}$ الموازي للشعاع $\overleftarrow{و}$ بحيث يكون (Δ') صورة (Δ) بالانسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{ش}$.

3) نفس السؤال إذا كان $\overleftarrow{ش}$ يوازي الشعاع $\overleftarrow{ي}$.

14. ا و ب نقطتان ثابتتان و $\overleftarrow{ش}$ شعاع غير معدوم .

عيّن مجموعة النقط ه ومجموعة النقط ه' من المستوي

بحيث يكون : (ا ه) // (ب ه) و $\overleftarrow{ه ه'} = \overleftarrow{ش}$.

15. ا و ب نقطتان ثابتتان من المستوي .

عيّن التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ه من المستوي النقطة ه' ، في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) الرباعي ا ب ه ه' متوازي أضلاع .

2) الرباعي ا ه ب ه' متوازي أضلاع .

16. ا و ب نقطتان ثابتتان من المستوي .

(Δ) مستقيم ثابت . ه نقطة متغيرة من (Δ) .

نسمي ا' نظيرة ا بالنسبة إلى ه و ه' منتصف القطعة [ا'ب] .

عيّن مجموعة النقط ه' .

17. ا و ب نقطتان ثابتتان من المستوي .
α و β عددان حقيقيان موجبان تماماً .
ﺟ و ﺟ′ نقطتان متغيرتان من المستوي بحيث يكون الرباعي ا ب ﺟ ﺟ′ شبه منحرف ويكون اﺟ′ $= \alpha$ ؛ ﺟ ﺟ′ $= \beta$.
عيّن مجموعتي النقطتين ﺟ و ﺟ′ .

18. ا نقطة ثابتة من المستوي .
(ى) دائرة تشمل النقطة ا . نصف قطرها ثابت ومركزها م متغير .
1) عيّن مجموعة النقط م .
2) (Δ) و (Δ') مماسان للدائرة (ى) في النقطتين ﺟ و ﺟ منحاهما منحى مستقيم (ف) ثابت .
عيّن مجموعتي النقطتين ﺟ و ﺟ′ .

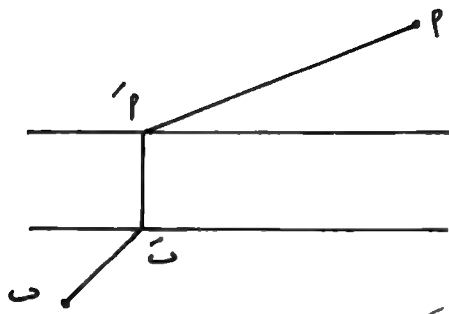
19. (Δ) وَ (Δ') مستقيمان متقاطعان .
ا و ب نقطتا ثابتتان .
أنشيء نقطة ﺟ من (Δ) ونقطة ﺟ′ من (Δ') بحيث يكون الرباعي ا ب ﺟ ﺟ′ متوازي أضلاع .

20. (ى) دائرة مركزها م وَنصف قطرها ىر .
$\overleftarrow{\text{ش}}$ شعاع معلوم .
أنشيء نقطتين ا و ب من الدائرة (ى) بحيث يكون $\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{ش}}$

21. (ى) و (ى′) دائرتان من المستوي . (ف) مستقيم ثابت .
أنشيء مستقيما (Δ) يوازي (ف) ويقطع (ى) و (ى′) في النقط ا ، ب ، ا′ ، ب′ ، على الترتيب ، بحيث يكون $\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{ا′ب′}}$.

22. ا ب ﺣ مثلث . ننشيء خارج هذا المثلث المربع ب ﺣ ى ﻫ .
نسمي ا′ المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ﺣ) و ى′ المسقط العمودي للنقطة ى على (ا ب) و ﻫ′ المسقط العمودي للنقطة ﻫ على (ا ﺣ) .
أثبت أن نقطة تقاطع المستقيمين (ى ى′) و (ﻫ ﻫ′) تنتمي إلى (ا ا′) .

23. نهر حافتاه متوازيتان.
ا و ب قريتان من جهتين مختلفتين بالنسبة لهذا النهر.
نريد إنجاز طريق يربط بين القريتين ا و ب ويقطع النهر عموديا.
عيّن النقطة ا′ من الشكل المجاور بحيث يكون طول هذا الطريق أصغر ما يمكن.



التحاكي :

24. نعتبر التحويل النقطي تا للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع) النقطة ن′ (س′ ؛ ع′) حيث س′ = 3 س − 4 و ع′ = 3 ع + 2

1) عيّن إحداثيي النقطة ا′ صورة النقطة ا (1 ، 2) بالتحويل تا.
2) عيّن إحداثيي النقطة ب سابقة النقطة ب′ (− 2 ، 0) بالتحويل تا.
3) أثبت أنه توجد نقطة وحيدة صامدة بالتحويل تا.
4) أثبت أن التحويل تا تحاك يطلب تعيين مركزه ونسبته.

25. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$). (Δ) مستقيم معادلته 2 س + ع − 5 = 0. حا التحاكي الذي مركزه ا (− 3 ، 1) ونسبته 4.
أوجد معادلة لصورة المستقيم (Δ) بالتحاكي حا.

26. ا ، ب ، ا′ ، ب′ أربع نقط من المستوي حيث (ا ب) // (ا′ ب′).

1) برهن أنه إذا كان ا ب ≠ ا′ ب′ فإنه يوجد تحاكيان مختلفان ، بحيث تكون القطعة [ا′ ب′] صورة القطعة [ا ب]. عيّن مركزي هذين التحاكيين.
2) ادرس الحالة ا ب = ا′ ب′.

27. (ى) دائرة مركزها م. ا نقطة داخل الدائرة (ى) و ا ≠ م.
نرفق بكل نقطة ن من (ى) النقطة ن′ التي هي المسقط العمودي للنقطة م على المستقيم (ا ن) والنقطة هـ التي هي مركز ثقل المثلث م ا ن′.
عيّن مجموعتي النقطتين ن′ و هـ عندما تتغير ن على (Δ).

28. ا ب حـ مثلث حيث تكون النقطتان ب و حـ ثابتتين والنقطة ا متغيرة من مستقيم (Δ) معلوم .

عيّن المجموعات التالية :

1) مجموعة منتصفات القطع [ا ب]
2) مجموعة منتصفات القطع [ا حـ]
3) مجموعة منتصفات القطع [ب′ حـ′] حيث ب′ و حـ′ هما منتصفا [ا ب] و [ا حـ] .
4) مجموعة مراكز ثقل المثلثات ا ب حـ .

29. ا ب حـ مثلث و ا′ منتصف [ب حـ] .

نفرض أن النقطتين ب و حـ ثابتتان والنقطة ا متغيرة بحيث يكون طول القطعة [ا ا′] ثابتا .

ما هي مجموعة النقط ا ؟

عيّن المجموعات التالية :

1) مجموعة النقط ب′ منتصفات القطع [ا حـ]
2) مجموعة النقط جـ′ منتصفات القطع [ا ب]
3) مجموعة النقط ء منتصفات القطع [ب′ حـ′] .

30. (Δ) و (Δ′) مستقيمان متقاطعان . ا و هـ نقطتان مختلفتان

أنشيء مثلثا ا ب حـ بحيث تكون ب نقطة من (Δ) وتكون حـ نقطة من (Δ′) ويكون هـ مركز ثقل المثلث ا ب حـ .

31. ا ب حـ مثلث . (Δ) مستقيم .

أنشيء مثلثا ا′ب′حـ′ متقايس الأضلاع بحيث يكون :

ا′ ∋ [ب حـ] ؛ ب′ ∋ [حـ ا] ؛ حـ′ ∋ [ا ب] و (ب′ حـ′) // (Δ) .

32. ا ، ب و م ثلاث نقط من المستوي .

تا الانسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{\text{ا ب}}$.

حا التحاكي الذي مركزه م ونسبته 2

ها التحويل المركب حا$^{-1}$ ∘ تا ∘ حا .

1) أنشيء صور النقط أ ، ب ، م بالتحويل ها .
2) أثبت أن التحويل ها انسحاب يطلب تعيين شعاعه .

33. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$.
تا الانسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{ش}(2 ، 3)$.
ها التناظر بالنسبة إلى حامل المحور $(م ، \overleftarrow{ي})$.
1) أنشيء صور النقط م ، أ $(-2 ، 0)$ ، ب $(0 ، 3)$ بالتحويل المركب ها∘تا .
2) هل توجد نقط صامدة بالتحويل ها∘تا ؟

34. أ و ب نقطتان ثابتتان من المستوي .
1) تا التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ن من المستوي النقطة ن′ مركز المسافات المتناسبة للنقط أ ، ب ، ن المرفقة بالمعاملات $(+1)$ ، (-1) ، $(+2)$ على الترتيب .
بيّن أن تا انسحاب يطلب تعيين شعاعه .
2) حا التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ن من المستوي النقطة ن′ مركز المسافات المتناسبة للنقط أ ، ب ، ن المرفقة بالمعاملات $(+1)$ ، $(+1)$ ، $(+2)$ على الترتيب .
أثبت أن حا تحاك مركزه منتصف القطعة [أ ب] .
ما هي نسبة هذا التحاكي ؟
3) α ، β ، γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
ل التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ن من المستوي النقطة ن′ مركز المسافات المتناسبة للنقط أ ، ب ، ن المرفقة بالمعاملات α ، β ، γ على الترتيب .
عيّن التحويل ل في كل حالة من الحالتين التاليتين :
- $\alpha + \beta = 0$
- $\alpha + \beta \neq 0$

الباب العاشر

الهندسة الفضائية

نُعالِج في هذا الباب المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية (المستويات ، المستقيمات وأوضاعها النسبية ، التوازي والتعامد في الفضاء)

تقدم هذه المفاهيم بطريقة بسيطة وبالاعتماد على رسومات وتمارين متنوعة تسمح للتلميذ تصور الأشكال في الفضاء .

الفقرات التالية ، ليست مقررة في برنامج شعبة العلوم : المستوي المحوري لقطعة مستقيم ، مقارنة أطوال القطع الواصلة بين نقطة ومختلف نقط مستوٍ ، الزوايا الثنائية .

34 المستويات والمستقيمات في الفضاء

1. الفضاء ، المستوي ، المستقيم

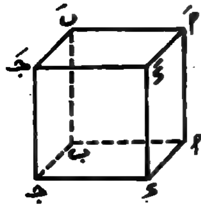
1.1 ـ الفضاء :

رأينا في السنوات السابقة كيف تمثل بعض الأجسام بالورق المقوى : المكعب ، الهرم ، متوازي المستطيلات ... هذه الأجسام أجزاء من الفضاء ، وكل نقطة من هذه الأجسام هي نقطة من الفضاء .

الفضاء هو مجموعة غير منتهية من النقط

2.1 ـ المستويات :

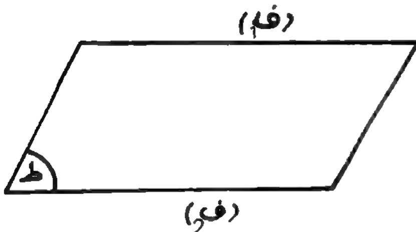
- طبقة ماء في حالة السكون تعطينا فكرة عن المستوي
- يمثل كل وجه من أوجه مكعب جزءا من مستوٍ مثلا ، الوجه أ أ′ ء′ ء في الشكل المجاور يمثل جزءاً من المستوي الذي يشمل النقط أ ، أ′ ، ء′ ، ء



الشكل 1

المستوي مجموعة غير منتهية من النقط وهو جزء من الفضاء يختلف عنه .

- يُمثَّل كل مستو (ط) بمتوازي أضلاع (الشكل 2)
- يحدِد كل مستو (ط) جزئين منفصلين (ف$_1$) و (ف$_2$) من الفضاء حدّهما المستوي (ط) نسمي كلا من (ف$_1$) و (ف$_2$) نصف فضاء مفتوحا ويسمى كل من (ف$_1$) $\cup$ (ط) و (ف$_2$) $\cup$ (ط) نصف فضاء مغلقا



الشكل 2

3.1 ـ المستويات والمستقيمات في الفضاء .

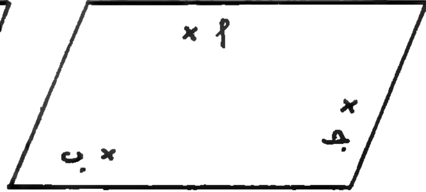
للمستويات والمستقيمات في الفضاء الخواص التالية:

1) إذا كانت أ ، ب نقطتين مختلفتين فإنه يوجد مستقيم وحيد يشمل النقطتين أ ، ب

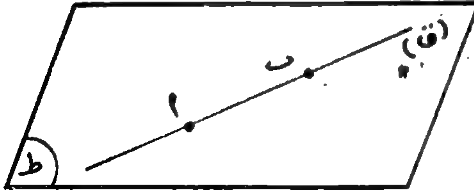


2) إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإنه يوجد مستو وحيد يشمل النقط أ ، ب ، حـ (الشكل 3)

3) إذا كان لمستو (ط) ولمستقيم (ق) نقطتان مشتركتان مختلفتان فإن (ط) يحتوي على (ق).(الشكل 4)



(الشكل 3)

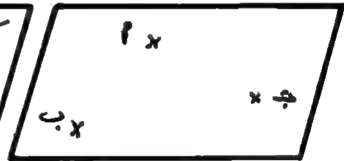


(الشكل 4)

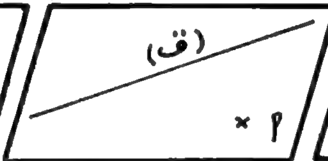
4.1 ـ تعيين المستوي .

من الخواص السابقة نستنتج ما يلي :

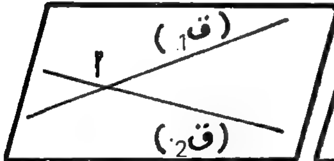
> يكون مستو معيّنا بإعطاء :
>
> - ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة (الشكل 5)
> - مستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم (الشكل 6)
> - مستقيمين متقاطعين (الشكل 7)



(الشكل 5)



(الشكل 6)



(الشكل 7)

2 ـ الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو .

(ق) مستقيم و (ط) مستوٍ.

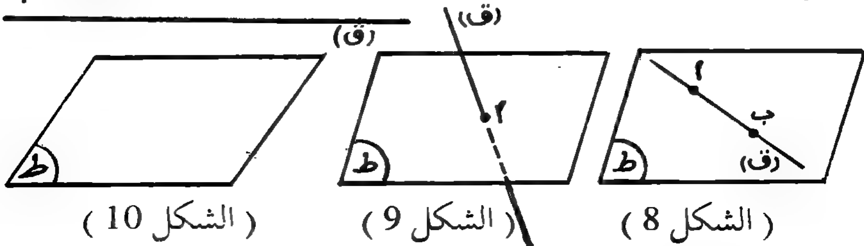
لدينا ثلاث حالات ممكنة

1) (ق) و (ط) لهما نقطتان مشتركتان . في هذه الحالة نقول إن (ق) محتو في (ط) . (الشكل 8)

2) (ق) و (ط) لهما نقطة مشتركة واحدة . في هذه الحالة نقول إن (ق) يقطع (ط) . (الشكل 9)

3) (ق) و (ط) ليست لهما أيّة نقطة مشتركة .

في هذه الحالة نقول إن (ق) و (ط) متوازيان تماما (الشكل 10)



(الشكل 8) (الشكل 9) (الشكل 10)

3 ـ الأوضاع النسبية لمستقيمين

($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمان في الفضاء .

لدينا الحالات التالية

1) ($ق_1$) و ($ق_2$) لهما نقطتان مشتركتان متمايزتان :

فهما متطابقان

2) ($ق_1$) و ($ق_2$) لهما نقطة مشتركة واحدة : فهما متقاطعان

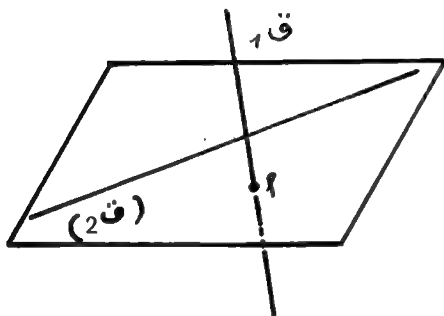
3) ($ق_1$) و ($ق_2$) ليست لهما أيّة نقطة مشتركة :

لتكن أ نقطة من ($ق_1$)

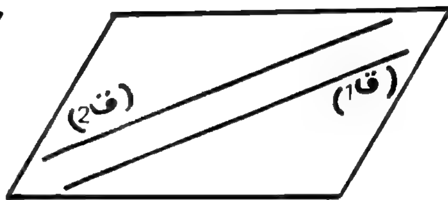
النقطة أ والمستقيم ($ق_2$) يعيّنان مستوياً (ط)

- إذا كان ($ق_1$) $\subset$ (ط) نقول إن ($ق_1$) و ($ق_2$) متوازيان تماما (الشكل 11)

• إذا كان ($ق_1$) يقطع (ط) نقول إن ($ق_1$) و ($ق_2$) ليسا في مستو واحد (الشكل 12)



(الشكل 12)



(الشكل 11)

خلاصة ما سبق :

> إذا كان ($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمين في الفضاء فإنهما
> - إما متطابقان
> - وإما متقاطعان
> - وإما متوازيان تماما
> - وإما ليسا في مستو واحد

4 ـ الأوضاع النسبية لمستويين

($ط_1$) و ($ط_2$) مستويان

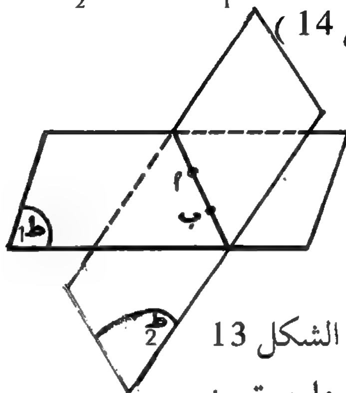
• إذا كانت للمستويين ($ط_1$) و ($ط_2$) ثلاث نقط مشتركة ليست على استقامة واحدة فإن المستويين ($ط_1$) وَ ($ط_2$) متطابقان

• إذا كان ($ط_1$) و ($ط_2$) متمايزين وكانت لهما نقطتان مشتركتان متمايزتان أ و ب فإن تقاطعهما هو المستقيم (أ ب)

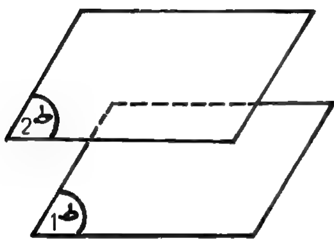
نقول إن ($ط_1$) و ($ط_2$) متقاطعان (الشكل 13)

• إذا كان المستويان ($ط_1$) و ($ط_2$) متمايزين وكانت لهما نقطة مشتركة أ فإن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة أ ونقول أيضا إنهما متقاطعان .

• إذا كان (ط $_1$) و (ط $_2$) منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما (الشكل 14)



(الشكل 13)



(الشكل 14)

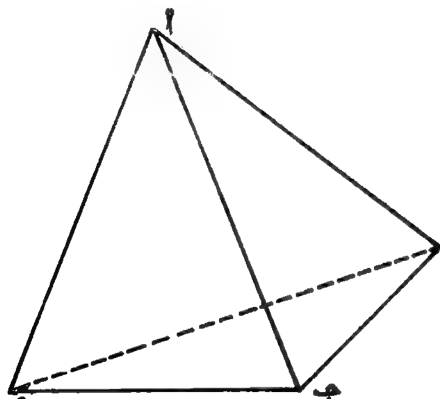
خلاصة ما سبق :

إذا كان (ط $_1$) و (ط $_2$) مستويين فإنهما • إما متطابقان • وإما متقاطعان • وإما متوازيان تماما

5 ـ رباعي الوجوه :

أ ، ب ، حـ ، ى أربع نقط ليست في مستو واحد

تعيّن هذه النقط أربعة مستويات : (أ ب حـ) ، (أ حـ ى) ، (أ ب ى) ، (ب حـ ى) وتحدّد هذه المستويات الأربعة ، جسما يسمى **رباعي وجوه** (الشكل 15)



(الشكل 15)

النقط أ ، ب ، حـ ، ى هي رؤوسه

القطع [أ ب] ، [أ حـ] ، [ب حـ] ، [أ ى] ، [ب ى] ، [حـ ى] هي أحرفه

أجزاء المستويات المحددة بالمثلثات أ ب حـ ، أ حـ ى ، أ ب ى ، ب حـ ى ، هي وجوه رباعي الوجوه

تمرين محلول :

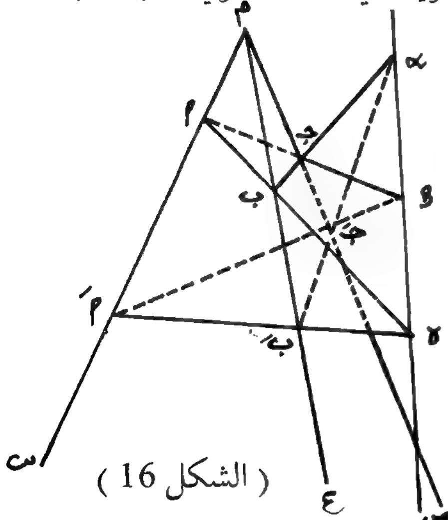
[م س) ، [م ع) ، [م ص) أنصاف مستقيمات ليست في مستو واحد . ا و ا′ نقطتان متمايزتان من] م س)
ب و ب′ نقطتان متمايزتان من] م ع) ، حـ و حـ′ نقطتان متمايزتان من] م ص)

1) بيّن أن المستقيمين (ا ب) و (ا′ ب′) متقاطعان أو متوازيان
2) نفرض أن المستقيمات (ا ب) ، (ا حـ) ، (ب حـ) تقطع المستقيمات (ا′ ب′) ، (ا′ حـ′) ، (ب′ حـ′) في النقط δ ، β ، α على الترتيب

- أثبت أن النقط ا ، ب ، حـ تعيّن مستويا وأن النقط ا′ ، ب′ ، حـ′ تعيّن مستويا وأن هذين المستويين مختلفان
- أثبت أن النقط الثلاث α ، β ، δ على استقامة واحدة

الحل :

1) المستقيمان المتقاطعان (م س) ، (م ع) يعيّنان مستويا . المستقيمان (ا ب) و (ا′ ب′) محتويان في هذا المستوي . فهما ، إذاً إما متقاطعان وإما متوازيان



(الشكل 16)

2)• النقط ا ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة لأنه لو كانت حـ نقطة من (ا ب) لكانت حـ نقطة من المستوي (م ب ا) وبالتالي تكون المستقيمات (م ا) ، (م ب) ، (م حـ) في مستوٍ واحد وهذا يناقض الفرض

وبنفس الطريقة يمكن الإثبات على أن ا′ ، ب′ ، ح′ ليست على استقامة واحدة

إذن :

ا ، ب ، ح تعيّن مستويا وَ ا′ ، ب′ ، ح′ تعيّن مستويا آخر

- المستقيم (م ا) يقطع المستوي (ا ب ح) في النقطة ا .

بما أن ا وَ ا′ مختلفتان فالنقطة ا′ لا تنتمي إلى المستوي (ا ب ح)

إذن المستويان (ا ب ح) و (ا′ ب′ ح′) مختلفان .

النقطة α تنتمي إلى المستقيمين (ب ح) و (ب′ ح′) فهي نقطة مشتركة للمستويين (ا ب ح) و (ا′ ب′ ح′)

كذلك النقطتان β و δ مشتركتان لهذين المستويين .

المستويان (ا ب ح) وَ (ا′ ب′ ح′) مختلفان ولهما نقطة مشتركة فهما متقاطعان وتقاطعهما مستقيم يشمل النقط α ، β ، δ

إذن : α ، β ، δ على استقامة واحدة .

35 التــوازي في الفضــاء

1 ـ المستقيمات المتوازية

1.1 ـ تعريف

يتوازى مستقيمان في الفضاء إذا وفقط إذا كانا متطابقين أو كانا في مستوٍ واحد ومنفصلين

- إذا توازى مستقيمان وكانا منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما
- في الهندسة المستوية إذا كان مستقيمان منفصلين فإنهما متوازيان ، بينما في الهندسة الفضائية هذا غير صحيح إذ يمكن أن يكون مستقيمان منفصلين دون أن يكونا متوازيين
- مستقيمان متوازيان تماما يعيّنان مستويا .

2.1 ـ نظرية 1

إذا كان (ق) مستقيما وكانت أ نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم وحيد يشمل أ ويوازي (ق)

البرهان

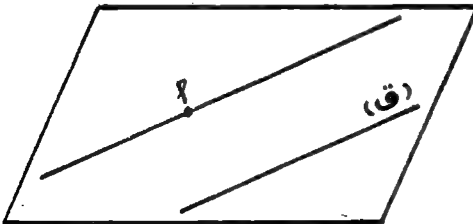
بالفعل

- إذا كانت أ ∈ (ق) فإن (ق) هو المستقيم الوحيد الذي يشمل أ ويوازي (ق) .



(الشكل 17)

- إذا كانت أ ∉ (ق) فإن (ق) و أ يعيّنان مستويا (ط) ونعلم أنه يوجد في (ط) مستقيم وحيد يشمل أ ويوازي (ق).



(الشكل 18)

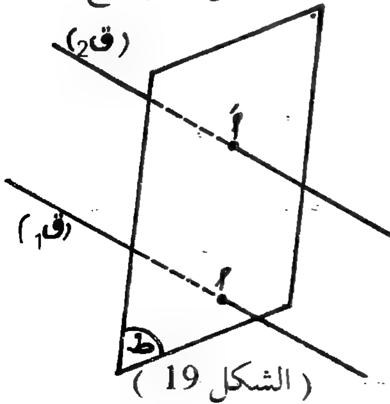
3.1 ـ نظرية 2

> إذا كان ($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمين متوازيين وكان (ط) مستويا يقطع ($ق_1$) فإن (ط) يقطع أيضا ($ق_2$)

البرهان :

($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمان متوازيان و (ط) مستو حيث (ط) ∩ ($ق_1$) = { ا }

- إذا كان ($ق_1$) و ($ق_2$) متطابقين فإنه من الواضح أن (ط) ∩ ($ق_2$) = { ا }
- إذا كان ($ق_1$) و ($ق_2$) متوازيين تماما فإنهما يعيّنان مستويا (ط′) يختلف عن المستوي (ط)



(الشكل 19)

بما أن (ط) و (ط′) لهما نقطة مشتركة ا فهما متقاطعان وتقاطعهما هو مستقيم (Δ) يقطع ($ق_2$) في النقطة ا′ لأن (Δ) يقطع ($ق_1$) و ($ق_1$) // ($ق_2$) والنقطة ا′ مشتركة بين المستقيم ($ق_2$) والمستوي (ط).

إذن المستوي (ط) يقطع المستقيم ($ق_2$) في النقطة ا′

4.1 ـ نظرية 3

> ($ق_1$) ، ($ق_2$) و ($ق_3$) ثلاثة مستقيمات في الفضاء.
> إذا كان ($ق_1$) يوازي ($ق_2$) وكان ($ق_2$) يوازي ($ق_3$) فإن ($ق_1$) يوازي ($ق_3$) .

البرهان :

($ق_1$) ، ($ق_2$) و ($ق_3$) ثلاثة مستقيمات في الفضاء

حيث ($ق_1$) // ($ق_2$) و ($ق_2$) // ($ق_3$)

لندرس وضعية ($ق_3$) بالنسبة إلى ($ق_1$) .

لدينا حالتان ممكنتان : [($ق_1$) و ($ق_3$) منفصلان] و [($ق_1$) و ($ق_3$) غير منفصلين] .

الحالة الأولى : ($ق_1$) و ($ق_3$) غير منفصلين

لتكن أ نقطة مشتركة بين المستقيمين ($ق_1$) و ($ق_3$)

نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد يشمل أ ويوازي ($ق_2$) .

بما أن المستقيمين ($ق_1$) و ($ق_3$) يشملان النقطة أ ويوازيان ($ق_2$) فهما متطابقان .

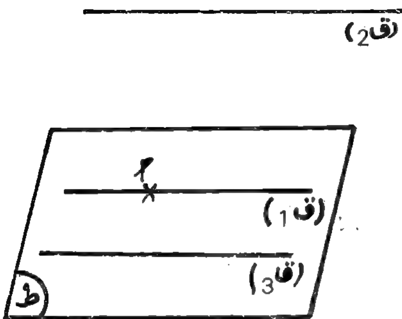
الحالة الثانية : ($ق_1$) و ($ق_2$) منفصلان .

لتكن أ نقطة من ($ق_1$) و (ط) المستوي المعيّن بالمستقيم ($ق_3$) وبالنقطة أ

حسب النظرية السابقة لو كان (ط) يقطع ($ق_1$) لكان يقطع ($ق_2$) وبالتالي يقطع ($ق_3$) وهذا يناقض الفرض : ($ق_3$) $\subset$ (ط)

إذن ($ق_1$) محتوي في (ط)

بما أن المستقيمين ($ق_1$) و ($ق_3$) منفصلان ومن نفس المستوي (ط) فهما متوازيان تماما .



(الشكل 20)

2 ـ المستويات والمستقيمات المتوازية

1.2 ـ تعريف :

يكون مستقيم (ﻫ) ومستو (ط) متوازيين إذا وفقط إذا كان (ط) و (ﻫ) منفصلين أو كان (ﻫ) محتويا في (ط) .

إذا كان المستقيم (ﻫ) والمستوي (ط) منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما

2.2 ـ شرط توازي مستقيم ومستوٍ :

يكون مستقيم (ﻫ) موازيا لمستو (ط) إذا وفقط إذا كان (ﻫ) موازيا لمستقيم من المستوي (ط)

البرهان :

• إذا كان (ﻫ) ⊃ (ط) فإن النظرية واضحة

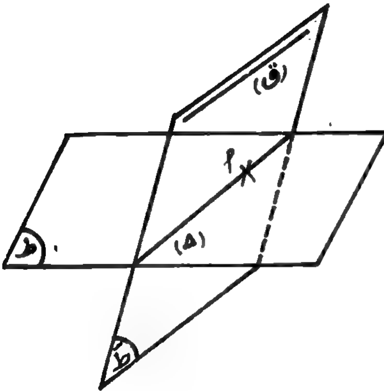
• نفرض فيما يلي أن (ﻫ) غير محتو في (ط)

1) نفرض أن (ﻫ) يوازي (ط)

ونبرهن أنه يوجد في المستوي (ط) مستقيم يوازي (ﻫ) .

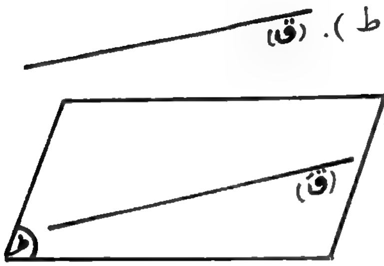
لتكن أ نقطة من (ط) . (ﻫ) و أ يعيّنان مستويا (ط′) يختلف عن (ط) وتقاطع (ط) و (ط′) هو مستقيم (∆) .

(ﻫ) و (∆) من نفس المستوي (ط′) وهما منفصلان لأن (ﻫ) و (ط) متوازيان تماما وبالتالي (ﻫ) و (∆) متوازيان تماما .



(الشكل 21)

2) نفرض أنه يوجد في المستوي (ط) مستقيم (ق′) يوازي المستقيم (ق) ونبرهن أن (ق) يوازي (ط).



(الشكل 22)

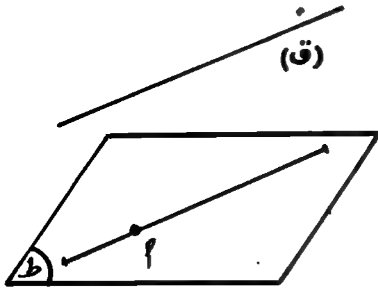
لو كان (ط) يقطع (ق) لكان أيضا يقطع (ق′)

[لأن (ق) // (ق′)] وهذا يناقض الفرض (ق′) ⊂ (ط)

إذن (ق) و (ط) متوازيان

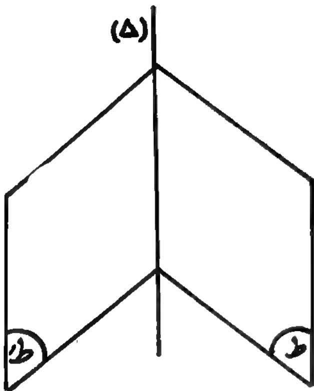
3.2 ـ نتائج :

انطلاقا من النظرية السابقة يمكن التأكد من النتيجتين التاليتين



(الشكل 23)

1. إذا كان مستقيم (ق) يوازي مستويا (ط) وكانت أ نقطة من (ط) فإن المستقيم الذي يوازي (ق) ويشمل أ محتوٍ في (ط).



(الشكل 24)

2. إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما

3 ـ المستويات المتوازية

1.3 ـ تعريف :

مستويان متوازيان هما مستويان متطابقان أو منفصلان

2.3 ـ شرط توازي مستويين :

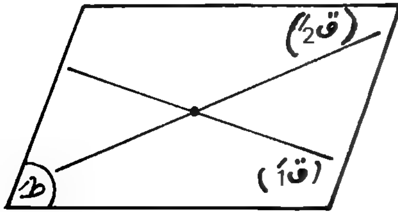
> يتوازى مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين وموازيين للمستوي الاخر

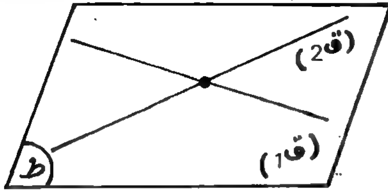
البرهان :

- إذا كان المستويان متطابقين فإن النظرية واضحة .
- نفرض فيما يلي أن المستويين (ط) و (ط′) مختلفان .

1) إذا كان (ط) و (ط′) متوازيين فإن كل مستقيم من (ط) يوازي (ط′) .

إذن (ط) يحتوي ، على الأقل ، على مستقيمين متقاطعين يوازيان (ط′) .





2) نفرض أن (ط) يحتوي على مستقيمين (ق$_1$) و (ق$_2$) متقاطعين موازيين للمستوي (ط′) ونبرهن أن (ط) و (ط′) متوازيان .

لو كان (ط) و (ط′) متقاطعين لكان تقاطعهما مستقيما (Δ) .

من (ق$_1$) // (ط) ومن (ق$_1$) // (ط′) (الشكل 25)

نستنتج أن (ق$_1$) // (Δ)

كذلك ، من (ق$_2$) // (ط) وَ من (ق$_2$) // (ط′)

نستنتج أن (ق$_2$) // (Δ) ويكون ،

عندئذ ، (ق$_1$) // (ق$_2$) وهذا يناقض

الفرض : (ق$_1$) و (ق$_2$) متقاطعان .

إذن (ط) و (ط′) متوازيان .

3.3 ـ نظرية :

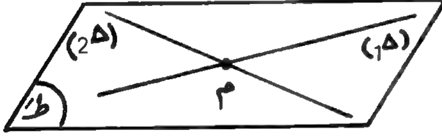
إذا كان (ط) مستويا وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستوٍ وحيد (ط′) يوازي (ط) ويشمل م

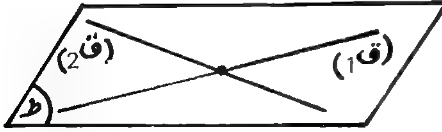
البرهان :

• **وجود (ط′) :**

ليكن (ق$_1$) و (ق$_2$) مستقيمين متقاطعين من المستوي (ط).

المستقيمان (△$_1$) و (△$_2$) اللذان يشملان النقطة م ويوازيان (ق$_1$) و (ق$_2$) متقاطعان فهما يعيّنان مستويا (ط′) يوازي (ط)





(الشكل 26)

• **وحدانية (ط′) :**

نفرض أنه يوجد مستوٍ (ط″) يختلف عن (ط′) ويشمل م ويوازي (ط).

المستويان (ط′) و (ط″) متقاطعان وتقاطعهما مستقيم (△)

المستقيمان المتقاطعان (ق$_1$) و (ق$_2$) من (ط) يوازيان (△) لأن كلاّ منهما يوازي (ط′) و (ط″) وهذا تناقض لأنه لا يوجد مستقيم يوازي مستقيمين متقاطعين

إذن (ط′) و (ط″) متطابقان وبالتالي (ط′) وحيد

4.3 ـ نظرية :

(ط$_1$) ، (ط$_2$) ، (ط$_3$) ثلاثة مستويات

إذا كان (ط$_1$) يوازي (ط$_2$) وكان (ط$_2$) يوازي (ط$_3$)

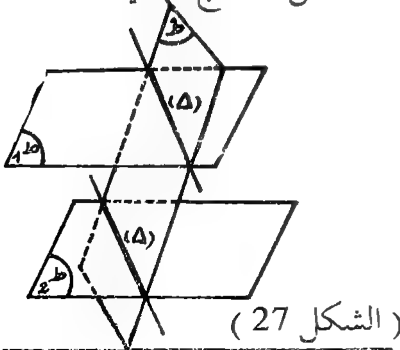
فإن (ط$_1$) يوازي (ط$_3$)

البرهان :

نفرض أن ($ط_1$) و ($ط_3$) متقاطعان ولتكن أ نقطة مشتركة بينهما.
المستويان ($ط_1$) و ($ط_3$) مختلفان ويشملان النقطة أ ويوازيان المستوي ($ط_2$)
وهذا تناقض مع النظرية السابقة إذن ($ط_1$) و ($ط_3$) متوازيان

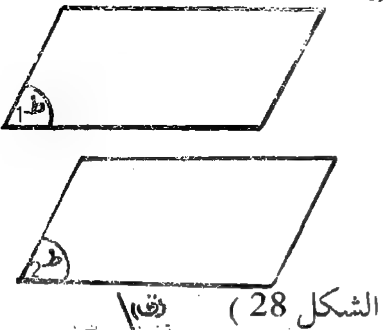
5.3 ـ نتائج :

انطلاقا من النظريات السابقة يمكن التأكد من النتائج التالية

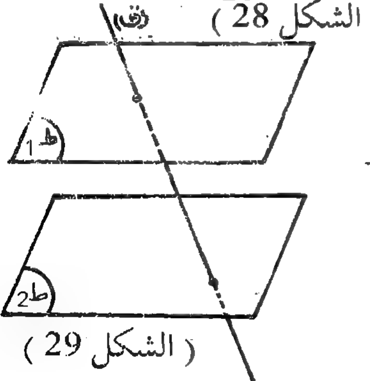


(الشكل 27)

1. إذا كان ($ط_1$) و ($ط_2$) مستويين متوازيين وكان (ط) مستويا يقطع ($ط_1$) فإن (ط) يقطع ($ط_2$) تقاطعهما متوازيان .


(الشكل 28)

2. إذا كان ($ط_1$) و ($ط_2$) مستويين متوازيين وكان (ق) مستقيما يوازي ($ط_1$) فإن (ق) يوازي ($ط_2$)


(الشكل 29)

3. إذا كان ($ط_1$) و ($ط_2$) مستويين متوازيين وكان (ق) مستقيماً يقطع ($ط_1$) فإن (ق) يقطع ($ط_2$).

تمرين محلول :

ا ب حـ ى رباعي وجوه ، اَ،بَ،حـَ منتصفات القطع [ب حـ] ،
[ا حـ] و [ا ى] على الترتيب
1) أثبت أن المستوي المعيّن بالنقط اَ ، بَ ، حـَ يوازي المستقيمين (ا ب) و (حـ ى)
2) أثبت أن المستوي(اَ بَ حـَ)يقطع الحرف [ب ى] في نقطة (ىَ)
وأن الرباعي اَ بَ حـَ ىَ متوازي أضلاع

الحل :

1) في المثلث ا ب حـ لدينا اَ منتصف [ب حـ] و بَ منتصف [ا حـ] .

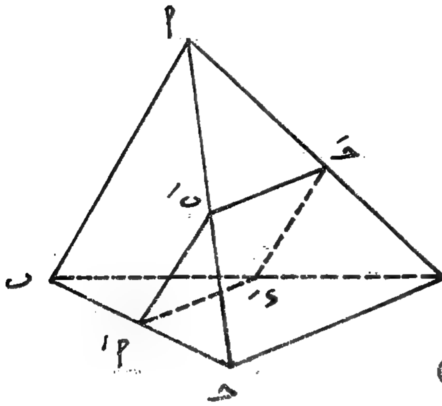
نعلم في هذه الحالة أن (اَ بَ) // (ا ب)

إذن (ا ب) يوازي المستوي (اَ بَ حـَ)

لأنه يوازي المستقيم (اَ بَ) من هذا المستوي

كذلك لدينا (بَ حـَ) // (حـ ى)

إذن (حـ ى) يوازي المستوي (اَ بَ حـَ)



(الشكل 30)

2) لنبرهن أن المستوي (اَ بَ حـَ) يقطع المستقيم (ب ى).

لو كان (ب ى) يوازي (اَ بَ حـَ) لكان المستويان (ا ب ى) و (اَ بَ حـَ) متوازيين لأن (ا ب) يوازي (اَ بَ حـَ)

ومن (حـ ى) يوازي (أ′ ب′ حـ′) نستنتج أن (حـ ى) يوازي (أ ب ى)
وهذا يعني أن أ ، ب ، حـ ، ى تنتمي إلى مستو واحد وهذا تناقض.
إذن (أ′ ب′ حـ′) يقطع (ب ى) في نقطة ى′.
لنبرهن أن ى′ هي منتصف [ب ى].
المستويان (أ′ ب′ حـ′) و (ب حـ ى) متقاطعان وتقاطعهما هو المستقيم (أ′ ى′)
المستقيم (حـ ى) يوازي كلا من المستويين (أ′ ب′ حـ′) و (ب حـ ى)
فهو إذا يوازي تقاطعهما (أ′ ى′)
في المثلث ب حـ ى لدينا : أ′ منتصف [ب حـ] و (أ′ ى′) // (حـ ى)
وهذا يعني أن ى′ هي منتصف [ب ى]
بما أن حـ′ منتصف [أ ى] و ى′ منتصف [ب ى] فإن (حـ′ ى′) // (أ ب).
ومن جهة أخرى لدينا :
(أ′ ب′) // (أ ب) و (ب′ حـ′) // (حـ ى) و (أ′ ى′) // (حـ ى)
ومنه : (أ′ ب′) // (حـ′ ى′) و (أ′ ى′) // (ب′ حـ′)
إذن أ′ ب′ حـ′ ى′ متوازي أضلاع.

36 التعــامــد في الفضــاء

1 ـ المستقيمات المتعامدة في الفضاء

1.1 ـ تعريف :

(ق$_{1}$) و (ق$_{2}$) مستقيمان في الفضاء و م نقطة من الفضاء .
نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد (Δ_{1}) يوازي (ق$_{1}$) ويشمل م .
كذلك يوجد مستقيم وحيد (Δ_{2}) يوازي (ق$_{2}$) ويشمل م .
عندما يكون المستقيمان (Δ_{1}) و (Δ_{2}) متعامدين نقول إن (ق$_{1}$) و (ق$_{2}$) متعامدان في الفضاء .

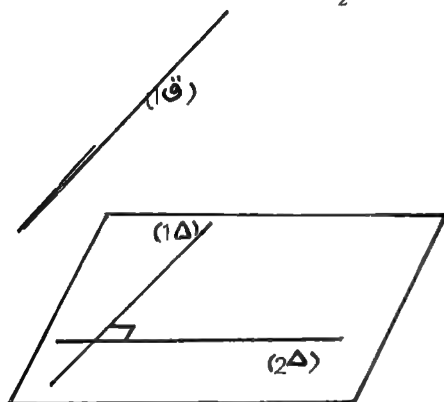
التعريف :

> يتعامد ، في الفضاء ، مستقيمان (ق$_{1}$) و (ق$_{2}$) إذا وفقط إذا كانا موازيين لمستقيمين (Δ_{1}) و (Δ_{2}) متقاطعين ومتعامدين

الترميز : إذا تعامد مستقيمان (ق$_{1}$) و (ق$_{2}$) في الفضاء
نكتب : (ق$_{1}$) $\perp$ (ق$_{2}$)

ملاحظة :

في الهندسة الفضائية يمكن لمستقيمين أن يكونا متعامدين دون أن يكونا متقاطعين بينما في الهندسة المستوية إذا تعامد مستقيمان فإنهما يتقاطعان .



(الشكل 31)

4.1 ـ نتائج :

يمكن التأكد من النتيجتين التاليتين

1) ($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمان متعامدان في الفضاء .

مهما كانت النقطة م من الفضاء فإن المستقيمين اللّذين يشملان م ويوازيان ($ق_1$) و ($ق_2$) متعامدان

2) ($ق_1$) ؛ ($ق_2$) و (Δ) ثلاثة مستقيمات في الفضاء .

إذا كان ($ق_1$) // ($ق_2$) وكان (Δ) $\perp$ ($ق_1$) فإن (Δ) $\perp$ ($ق_2$)

2 ـ المستقيمات والمستويات المتعامدة

1.2 ـ نظرية وتعريف :

(Δ) مستقيم و م نقطة من (Δ)

يوجد في كل مستو يحتوي على (Δ) مستقيم وحيد يعامد (Δ) في

ليكن ($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمين متقاطعين في م ويعامدان (Δ)

يعيّن هذان المستقيمان مستويا (ط)

لنبرهن أن (Δ) يعامد كل مستقيم من (ط)

ليكن (ق) مستقيما من (ط)

لدينا حالتان : (ق) يشمل م ، (ق) لا يشمل م

• **الحالة الأولى : (ق) يشمل م :**

لتكن ا و ا′ نقطتين مختلفتين من (Δ) ومتناظرتين بالنسبة إلى م وليكن (ق′) مستقيما من (ط) يقطع المستقيمات ($ق_1$) ، ($ق_2$) و (ق) في النقط ب ، ح ، د على الترتيب

لدينا :

ا ب = ا′ ب (لأن ($ق_1$) محور [ا ا′] في المستوي (ا ب ا′))

ا ح = ا′ ح (لأن ($ق_2$) محور [ا ا′] في المستوي (ا ح ا′))

المثلثان ا ب حـ و ا′ ب حـ متقايسان

وبالتالي :

$\widehat{\text{ا ب حـ}} = \widehat{\text{ا′ ب حـ}}$

أي $\widehat{\text{ا ب هـ}} = \widehat{\text{ا′ ب هـ}}$

من $\widehat{\text{ا ب هـ}} = \widehat{\text{ا′ ب هـ}}$

و ا ب = ا′ ب

نستنتج أن المثلثين ا ب هـ و ا′ ب هـ متقايسان وبالتالي ا هـ = ا′ هـ .

المثلث هـ ا ا′ متساوي الساقين

والمستقيم (م هـ) هو متوسطه المتعلق بالقاعدة [ا ا′] فهو إذاً عمودي على (ا ا′) (الشكل 32)

إذن (Δ) يعامد (ق)

- **الحالة الثانية : (ق) لا يشمل م**

يوجد في المستوي (ط) مستقيم (ق″) يشمل م ويوازي (ق) .

حسب الحالة السابقة (Δ) يعامد (ق″)

وبما أن (ق) يوازي (ق″) فإن (Δ) يعامد (ق)

ومنه النظرية والتعريف التاليين

نظرية :

إذا كان مستقيم (Δ) عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو (ط) فإن (Δ) عمودي على كل المستقيمات من (ط) .

تعريف :

نقول إن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ط) إذا وفقط إذا كان (Δ) عموديا على كل المستقيمات من (ط)

إذا كان (Δ) عموديا على (ط) نقول أيضا إن (ط) عمودي على (Δ)

2.2 ـ شرط تعامد مستقيم ومستو :

من النظرية والتعريف السابقين نستنتج النظرية التالية

نظرية :

يكون مستقيم (Δ) عموديا على مستو (ط) إذا وفقط إذا كان (Δ) عموديا على مستقيمين متقاطعين من (ط)

3.2 ـ نظريات :

يمكن التأكد من النظريتين التاليتين (انظر إلى التمرين رقم 38 والتمرين رقم 39)

نظرية 1 :

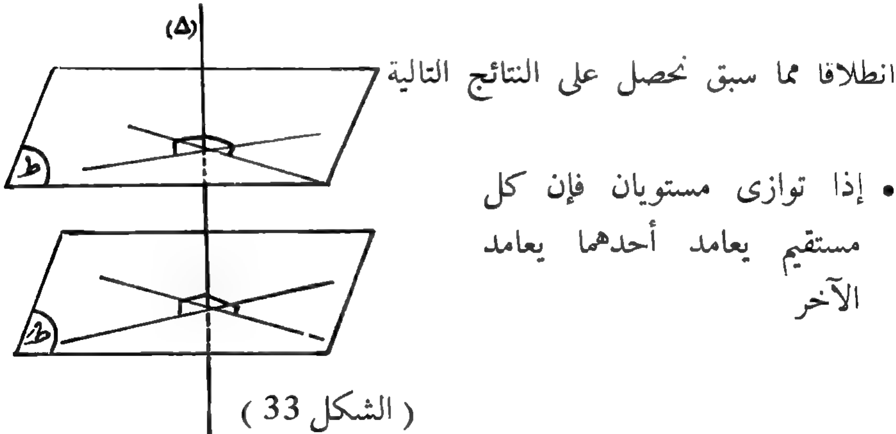
إذا كان (Δ) مستقيما وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستو وحيد يعامد (Δ) ويشمل م

نظرية 2 :

إذا كان (ط) مستويا وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم وحيد يعامد (ط) ويشمل م

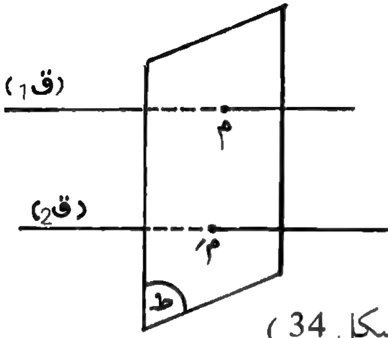
انطلاقا مما سبق نحصل على النتائج التالية

- إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم يعامد أحدهما يعامد الآخر



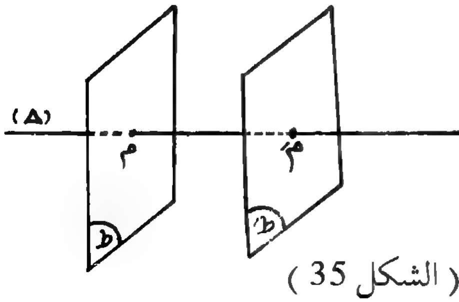
(الشكل 33)

- إذا توازى مستقيمان فإن كل مستو يعامد أحدهما يعامد الآخر



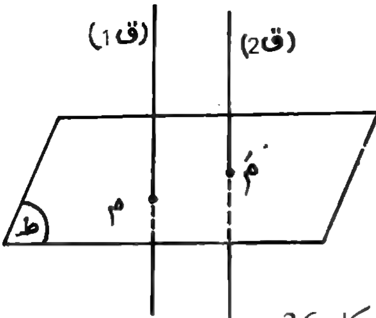
(الشكل 34)

- إذا عامد مستويان نفس المستقيم فإن هذين المستويين متوازيان



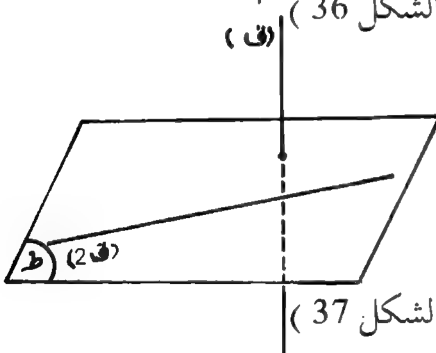
(الشكل 35)

- إذا عامد مستقيمان نفس المستوي فإن هذين المستقيمين متوازيان



(الشكل 36)

- يتعامد مستقيمان في الفضاء إذا وفقط إذا كان أحدهما عموديا على مستو يحتوي على الآخر

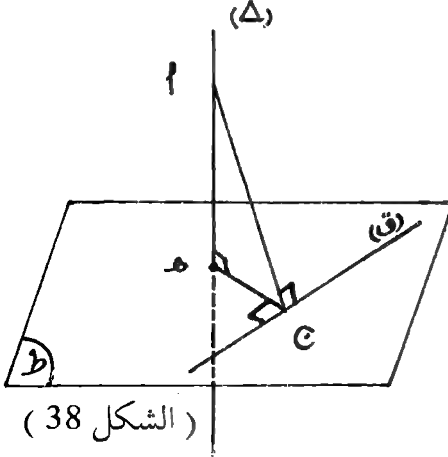


(الشكل 37)

4.2 ـ تمرين محلول :

(ط) مستو و (Δ) مستقيم عمودي على (ط) في النقطة هـ
(ق) مستقيم من (ط) لا يشمل هـ
أ نقطة من (Δ) تختلف عن هـ و ج نقطة من (ق)
برهن أن : (هـ ج) ⊥ (ق) ⟺ (أ ج) ⊥ (ق)

الحل :



(الشكل 38)

(ق) عمودي على (Δ) لأن
(Δ) عمودي على (ط)

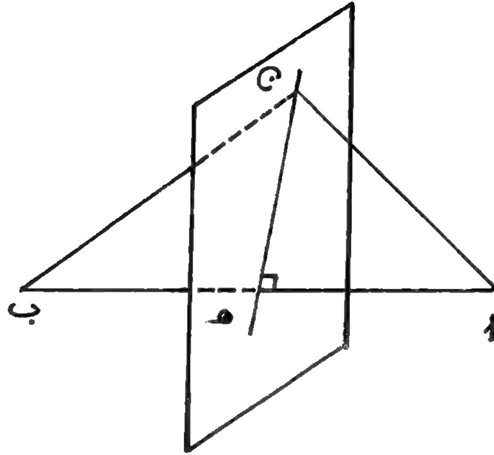
• إذا كان (هـ ج) عموديا على (ق) يكون (ق) عموديا على المستقيمين المتقاطعين (هـ ج) و (Δ) وبالتالي يكون (ق) عموديا على المستوي (أ هـ ج).
إذن : (ق) عمودي على (أ ج)

• إذا كان (أ ج) عموديا على (ق) يكون (ق) عموديا على المستقيمين المتقاطعين (أ ج) و (Δ) وبالتالي يكون (ق) عموديا على المستوي (أ هـ ج)
إذن (ق) عمودي على (هـ ج)

5.2 ـ المستوي المحوري لقطعة مستقيم :

تعريف :

أ ، ب نقطتان متمايزتان ، م منتصف القطعة [أ ب]
المستوي العمودي على المستقيم (أ ب) في النقطة م يسمى المستوي المحوري للقطعة [أ ب]



(الشكل 39)

ملاحظات :

- في المستوي المحوري للقطعة [أ ب] كل مستقيم يشمل منتصف [أ ب] هو محور للقطعة [أ ب]
- كل محور للقطعة [أ ب] هو مستقيم من المستوي المحوري للقطعة [أ ب]

نتيجة :

في المستوي نعلم أنه إذا كانت أ ، ب نقطتين متمايزتين فإن مجموعة النقط ن التي تحقق المساواة ن أ = ن ب هي محور القطعة [أ ب] .

وفي الفضاء لدينا نتيجة مماثلة :

إذا كانت أ و ب نقطتين متمايزتين فإن مجموعة النقط ن التي تحقق المساواة ن أ = ن ب هي المستوي المحوري للقطعة [أ ب]

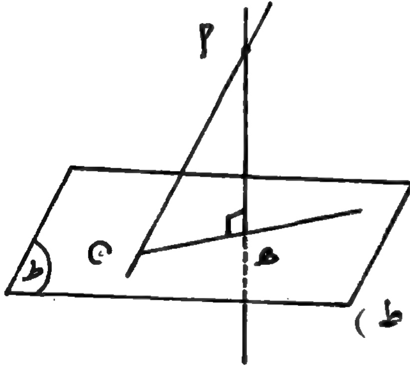
3 ـ مقارنة أطوال القطع الواصلة بين نقطة ومختلف نقط مستو

1.3 ـ المسافة بين نقطة ومستو :

> (ط) مستو ، أ نقطة من الفضاء ، هـ نقطة تقاطع (ط) مع المستقيم الذي يشمل أ ويعامد (ط)
>
> مهما كانت النقطة ن من (ط) لدينا : أ هـ ≤ ن أ

بالفعل :

- إذا كانت ا ، ﻫ ، ﻫ متمايزة فإن المثلث ا ﻫ ﻫ قائم في ﻫ و ا ﻫ وتره ومنه النتيجة



(الشكل 40)

- إذا كانت نقطتان من النقط الثلاث ا ، ﻫ ، ﻫ متطابقتين فإن النتيجة واضحة .

يسمى الطول ا ﻫ بالتعريف المسافة بين النقطة ا والمستوي (ط)

2.3 ـ مقارنة أطوال القطع الواصلة بين نقطة ومختلف نقط مستو :

نظرية :

(ط) مستو ، و ا نقطة من الفضاء ، ﻫ نقطة تقاطع (ط) مع المستقيم الذي يشمل ا ويعامد (ط)

مهما كانت النقطتان ب و ح من (ط) لدينا :

ﻫ ب = ﻫ ح ⟺ ا ب = ا ح

ﻫ ب < ﻫ ح ⟺ ا ب < ا ح

بالفعل :

• إذا كان ﻫ ب = ﻫ ح فإن المثلثين القائمين ا ﻫ ب و ا ﻫ ح متقايسان ومنه

ا ب = ا ح

وإذا كان ا ب = ا ح فإن المثلثين القائمين ا ﻫ ب و ا ﻫ ح متقايسان

وبالتالي ﻫ ب = ﻫ ح

إذن ﻫ ب = ﻫ ح ⟺ ا ب = ا ح

• إذا كان هـ ب < هـ حـ فإنه توجد نقطة ب′ من القطعة هـ حـ تحقق المساواة هـ ب = هـ ب′ ومنه
ا ب = ا ب′
وفي المستوي ا هـ حـ لدينا :
هـ ب′ < هـ حـ ⟸ ا ب′ < ا حـ
إذن :
هـ ب < هـ حـ ⟸ ا ب < ا حـ

(الشكل 41)

4 ـ المستويات المتعامدة

1.4 ـ تعريف :

(ط) مستو و (Δ) مستقيم عمودي على (ط)
كل مستو يحتوي على (Δ) يسمى مستويا عموديا على (ط)

التعريف :

يكون مستو (ك) عموديا على مستو (ط) إذا وفقط إذا احتوى (ك) على مستقيم عمودي على (ط)

• إذا كان المستوي (ك) عموديا على المستوي (ط) فإن (ك) يحتوي على مستقيم (Δ) يعامد (ط) .
لتكن م نقطة تقاطع (Δ) و (ط). المستويان (ط) و (ك) متقاطعان وتقاطعهما مستقيم (ق) يشمل م

(الشكل 42)

ليكن (ﻫ′) المستقيم من (ط) العمودي على (ﻫ) في النقطة م

المستقيم (ﻫ′) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (△) و(ﻫ) من (ك). فهو عمودي على (ك)

إذن المستوي (ط) عمودي على المستوي (ك)

ومنه النتيجة التالية

إذا كان مستو (ك) عموديا على مستو (ط) فإن المستوي (ط) عمودي على المستوي (ك) ونقول إن المستويين (ك) و(ط) متعامدان

2.4 ـ نظريات :

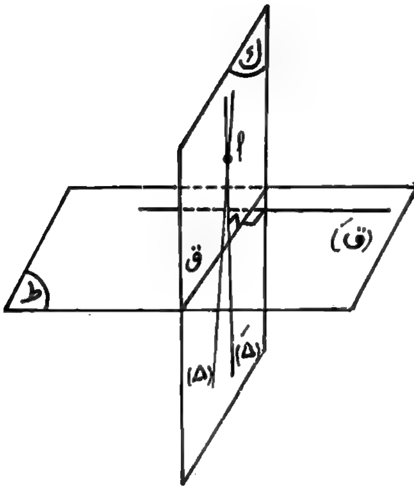
1. إذا كان (ك) و (ط) مستويين متعامدين وكانت أ نقطة من (ك) فإن (ك) يحتوي على المستقيم الذي يشمل أ ويعامد ط

البرهان :

(ط) و (ك) مستويان متعامدان تقاطعهما المستقيم (ﻫ).

أ نقطة من (ك)، (△) مستقيم يشمل أ ويعامد (ط)؛

(△′) مستقيم من (ك) يشمل أ ويعامد (ﻫ). بما أن المستويين (ط) و(ك) متعامدان فإنه يوجد، في المستوي (ط) مستقيم (ﻫ′) يعامد المستوي (ك).



(الشكل 43)

المستقيم (ﻫ′) عمودي على كل مستقيم من (ك) فهو عمودي على (△′)

لدينا :

(△′) يعامد المستقيمين المتقاطعين (ق) و (ق′) فهو إذاً عمودي على المستوي (ط)

المستقيمان (△′) و (△) يشملان النقطة ا ويعامدان المستوي (ط) فهما متطابقان

إذن (△) ⊂ (ك)

• مما سبق نستنتج أيضا النتيجة التالية

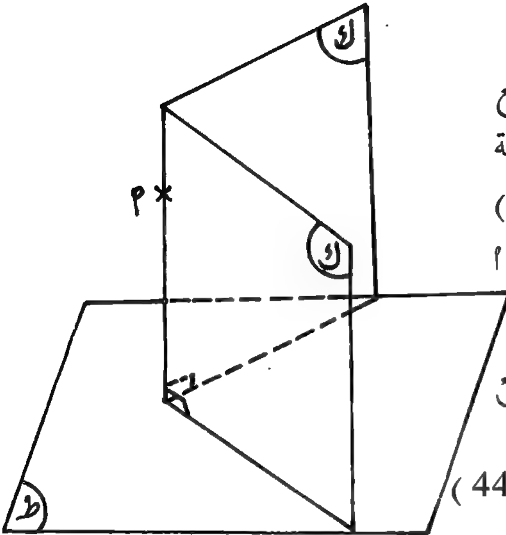
إذا كان (ك) و (ط) مستويين متعامدين وكان (ق) مستقيم تقاطعهما فإن كلّ مستقيم من (ك) عمودي على (ق) يكون عموديا على (ط)

2. إذا كان (ك) و (ك′) مستويين متقاطعين وكان كل منهما عمودياً على مستو (ط) فإن مستقيم تقاطع (ك) و (ك′) يكون عمودياً على (ط)

البرهان :

لتكن ا نقطة من مستقيم تقاطع (ك) و (ك′) . حسب النظرية السابقة كل من (ك) و (ك′) يحتوي على المستقيم الذي يشمل ا ويعامد (ط) .

إذاً هذا المستقيم هو مستقيم تقاطع (ك) و (ك′)



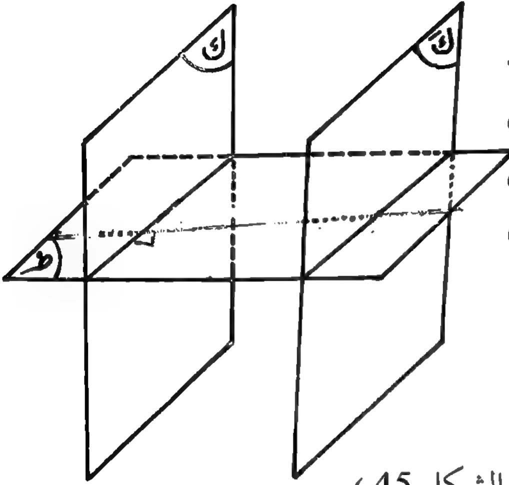
(الشكل 44)

3. إذا كان (ك) و (ك′) مستويين متوازيين وكان (ط) مستويا عموديا على (ك) فإن (ط) عمودي على (ك′)

البرهان :

بما أن (ك) و (ط) متعامدان فإن (ط) يحتوى على مستقيم عمودي على (ك) وهذا المستقيم عمودي على (كَ) لأن (ك) و (كَ) متوازيان

إذن (ط) عمودي على (كَ)



(الشكل 45)

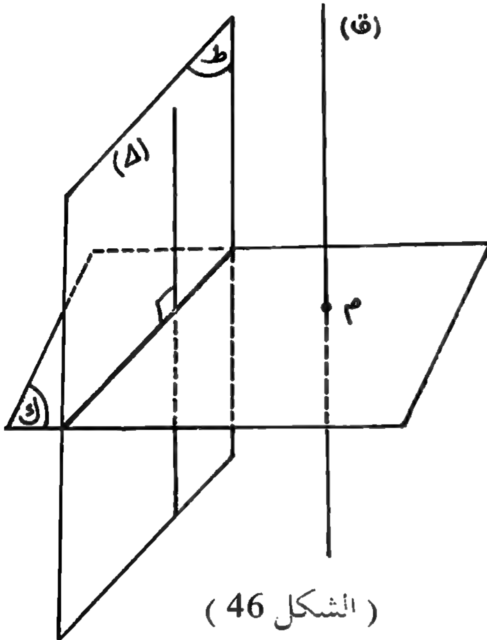
4. إذا كان مستقيم (ﻫ) ومستو (ط) عموديين على نفس المستوي (ك) فإن (ﻫ) و (ط) متوازيان

البرهان :

المستوي (ط) يحتوي على مستقيم (Δ) عمودي على (ك) لأن (ط) و (ك) متعامدان .

المستقيمان (ﻫ) و (Δ) متوازيان لأنهما عموديان على نفس المستوي (ك)

إذن (ﻫ) و (ط) متوازيان لأن (ط) يحتوي على المستقيم (Δ) الموازي للمستقيم (ﻫ)



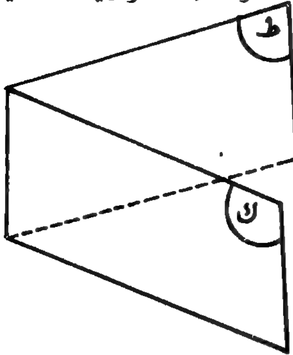
(الشكل 46)

5 ـ الزوايا الثنائية :

1.5 ـ تعريف :

(ط) و (ك) مستويان متقاطعان تقاطع نصف فضاء مغلق حده (ط) مع نصف فضاء مغلق حده (ك) يسمى **زاوية ثنائية**

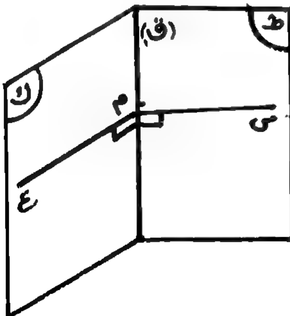
- مستقيم تقاطع المستويين (ط) و (ك) يسمى حرف الزاوية الثنائية
- يسمى نصفا المستويين اللذان يحددان زاوية ثنائية وجهي هذه الزاوية الثنائية
- نرمز إلى الزاوية الثنائية التي وجهاها (ط′) و (ك′) بالرمز [ط′ ، ك′]
- إذا كان (ط) و (ك) متعامدين نقول إن الزاوية الثنائية قائمة



(الشكل 47)

2.5 ـ المقطع القائم لزاوية ثنائية :

إذا كانت [ط′ ، ك′] زاوية ثنائية حرفها (ى) فإن تقاطعها مع مستو عمودي على (ى) هو زاوية [م س ، م ع] حيث م ∈ (ى) ، [م س) ⊂ (ط′) ، [م ع) ⊂ (ك′) ، تسمى الزاوية [م س ، م ع] مقطعا قائما للزاوية الثنائية [ط′ ، ك′]



(الشكل 48)

تعريف :

يسمى تقاطع زاوية ثنائية مع مستو عمودي على حرفها مقطعا قائما لها

نتائج :

نذكر فيما يلي نتيجتين متعلقتين بالمقاطع القائمة لزاوية ثنائية

1) كل المقاطع القائمة لزاوية ثنائية متقايسة

2) تكون زاويتان ثنائيتان متقايستين إذا وفقط إذا تقايس مقطع قائم لإحداهما ومقطع قائم للأخرى

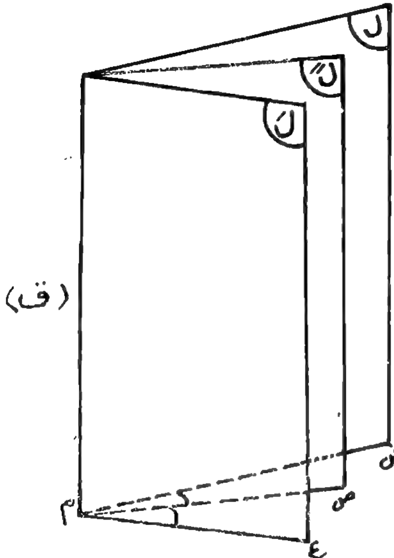
3.5 ـ المستوي المنصف لزاوية ثنائية :

[ل ، ل′] زاوية ثنائية حرفها (ه)

[م س ، م ع] مقطع قائم لها

[م ص) منصف الزاوية [م س ، م ع]

يسمى نصف المستوي (ل″) الذي حده (ه) ويحتوي على [م ص) منصف الزاوية الثنائية [ل ، ل′]



(الشكل 49)

تمـارين

المستويات والمستقيمات في الفضاء

1. (ط) مستو ، ا نقطة من (ط) و (Δ) مستقيم في (ط) لايشمل النقطة
ا . ب نقطة من الفضاء لاتنتمي إلى (ط) .
أثبت أن المستقيمين (Δ) و (اب) ليسا في مستو واحد .

2. (Δ) و (Δ′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
ا ، ب نقطتان مختلفتان من (Δ) .
ا′ ، ب′ نقطتان مختلفتان من (Δ′) .
أثبت أن النقط ا ؛ ب ؛ ا′ ؛ ب′ ليست في مستو واحد .

3. (Δ) و (Δ′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
ا نقطة من (Δ) وَ ا′ نقطة من (Δ′) .
(Δ) و ا′ يعينان مستويا (ط) ؛ (Δ′) و ا يعينان مستويا (ط′) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ط) و (ط′) .

4. ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط ليست في مستو واحد .
1) أثبت أن ثلاث نقط منها ليست على إستقامة واحدة .
2) عيّن عدد المستويات المعيّنة بالنقط الأربع .
ثم عيّن مستقيمات تقاطع هذه المستويات مثنى مثنى

5. (ط) مستو . (Δ) و (Δ′) مستقيمان في (ط) متقاطعان . م نقطة من الفضاء لاتنتمي إلى (ط) .
(ك) المستوي المعيّن بالنقطة م والمستقيم (Δ) .
(ك′) المستوي المعيّن بالنقطة م والمستقيم (Δ′) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ك′) .

6. (ط) مستو . (∆) و (∆′) مستقيمان في (ط) متقاطعان في نقطة ا .
(ق) مستقيم يقطع (ط) في نقطة م تختلف عن ا .
عيّن مجموعة المستقيمات التي تقطع في آن واحد المستقيمات الثلاثة (∆) ، (∆′) و (ق) .

7. (∆) و (∆′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
ا ، ب نقطتان من (∆) و ا′ ، ب′ نقطتان من (∆′) .
أثبت أن المستقيمين (اا′) و (ب ب′) ليسا في مستو واحد .

8. (ط) مستو . ب ، حـ نقطتان مختلفتان من (ط) .
ا نقطة لاتنتمي إلى (ط) . م نقطة من المستقيم (ا ب) و ن نقطة من المستقيم (ا حـ)
أثبت أنه إذا قطع المستقيم (م ن) المستوي (ط) فإنه يقطع المستقيم (ب حـ) .

9. ا ب حـ د رباعي في مستو (ط) . نفرض أن ا ب حـ د ليس شبه منحرف .
م نقطة لاتنتمي إلى (ط) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م ا ب) و (م حـ د) .
ثم مستقيم تقاطع المستويين (م ا د) و (م ب حـ) .

10. ا ب حـ د متوازي أضلاع في مستو (ط) .
م نقطة لا تنتمي إلى (ط) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م ا حـ) و (م ب د) .

11. ($ط_1$) و ($ط_2$) مستويان متقاطعان و (∆) مستقيم تقاطعهما .
ا ، ب نقطتان مختلفتان من ($ط_1$) بحيث المستقيم (ا ب) يقطع المستقيم (∆) في النقطة حـ .
م نقطة لا تنتمي إلى المستويين ($ط_1$) و ($ط_2$) بحيث يقطع المستقيمان (م ا) و (م ب) المستوي ($ط_2$) في النقطتين ا′ ، ب′ على الترتيب .
أثبت أن النقط الثلاث ا′ ، ب′ ، حـ على استقامة واحدة .

12. (ط) مستو . (Δ) مستقيم يقطع (ط) في نقطة هـ .
ا ، ب نقطتان من (Δ) و ن نقطة من الفضاء بحيث يقطع المستقيمان (ن ا) و (ن ب) المستوي (ط) في النقطتين ا′ ، ب′ .
أثبت أن النقط الثلاث هـ ، ا′ ؛ ب′ على إستقامة واحدة .

13. ا ب حـ مثلث في مستو (ط) .
ا′ ؛ ب′ ؛ حـ′ منتصفات القطع [ب حـ] ، [حـ ا] ، [ا ب] على الترتيب .
د نقطة لا تنتمي إلى المستوي (ط) .
أثبت أن المستويات (د ا ا′) ؛ (د ب ب′) ؛ (د حـ حـ′) تتقاطع حسب مستقيم واحد يطلب تعيينه .

14. ا ب حـ د رباعيّ وجوه . م منتصف القطعة [ا د] .
هـ مركز ثقل المثلث ا ب حـ .
- أثبت أن المستقيم (م هـ) يقطع المستوي (ب حـ د) في نقطة ي
- أثبت أن الرباعي ب ي حـ د متوازي أضلاع .

15. ا ب حـ د رباعيّ وجوه . هـ مركز ثقل المثلث ب حـ د .
هـ′ مركز ثقل المثلث ا حـ د .
أثبت أن المستقيمين (ا هـ) و (ب هـ′) متقاطعان .

16. ا ب حـ د رباعي وجوه . (ط) هو المستوي (ب حـ د) .
(Δ) مستقيم من (ط) يقطع المستقيمات (ب حـ) ؛ (حـ د) ؛ (ب د) في ثلاث نقط مختلفة . ن نقطة من القطعة [ا حـ] .
(ك) هو المستوي المعيّن بالنقطة ن والمستقيم (Δ) .
1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ا ب حـ) .
2) عيّن تقاطع المستقيم (ا ب) مع المستوي (ك) .
3) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ا ب د) .
أثبت أن هذا المستقيم يقطع المستقيم (ب د) في نقطة تنتمي إلى (Δ) .

17. (ق$_1$) و (ق$_2$) مستقيمان ليسا في مستو واحد.
أ نقطة من (ق$_1$) و (∆) المستقيم الذي يشمل أ ويوازي (ق$_2$).
1) أثبت أن المستوي (ط) المعيّن بالمستقيمين (ق$_1$) و (∆) يوازي تماماً (ق$_2$).
2) بيّن أن المستوي (ط) ثابت، عندما تتغير النقطة أ في (ق$_1$)

18. (ق$_1$) و (ق$_2$) مستقيمان ليسا في مستو واحد. و أ نقطة من الفضاء.
أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل أ ويوازي المستقيمين (ق$_1$) و (ق$_2$).

19. (ق) و (∆) مستقيمان متوازيان من مستو (ط).
(ك) و (ك$'$) مستويان متقاطعان يحتويان على (ق) و (∆) على الترتيب.
(∆$'$) مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ك$'$).
ما هي وضعية المستقيم (∆$'$) بالنسبة إلى المستوي (ط).

20. (ط) و (ك) مستويان متقاطعان و (ق) مستقيم تقاطعهما.
(∆) مستقيم بحيث (∆) و (ق) ليسا في مستو واحد.
و ﺟ نقطة من (∆).
1) ارسم المستويين (ط$'$) و (ك$'$) اللذين يشملان ﺟ ويوازيان (ط) و (ك) على الترتيب
2) أثبت أن (ط$'$) و (ك$'$) متقاطعان.
3) إذا كان (ق$'$) مستقيم تقاطع المستويين (ط$'$) و (ك$'$)
ما هي وضعية المستقيم (ق$'$) بالنسبة إلى كل من (ط)، (ك) و (ق)؟

21. (ق) مستقيم يوازي مستويا (ط).
أ، ب نقطتان مختلفتان من (ق). م، ﺟ نقطتان من (ط).
1) أثبت أن المستويين (أ ب م) و (أ ب ﺟ) يقطعان (ط).
2) إذا كان (∆) مستقيم تقاطع المستويين (أ ب م) و (ط) وإذا كان (∆$'$) مستقيم تقاطع المستويين (أ ب ﺟ) و (ط)
أثبت أن المستقيمين (∆) و (∆$'$) متوازيان.
في أية حالة يتطابق فيها المستقيمان (∆) و (∆$'$)؟

22. أ ب حـ ء رباعي وجوه .
أ′ ؛ ب′ ؛ حـ′ ؛ ء′ منتصفات القطع [أ ب] ، [ب حـ] ، [حـ ء] ، [ء أ]
على الترتيب .
أثبت أن الرباعي أ′ ب′ حـ′ ء′ متوازي أضلاع .

23. أ ب حـ ء رباعي وجوه . (ط) مستو يوازي كلا من المستقيمين (أ ب)
و (حـ ء) ويقطع المستقيمات (أ حـ) ، (أ ء) ، (ب ء) ، (ب حـ) في النقط
م ، ﻫ ، م′ ، ﻫ′ على الترتيب .
بيّن أن الرباعي م ﻫ م′ ﻫ′ متوازي أضلاع .

24. (ﻭ) و (ﻭ′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
(Δ) مستقيم لا يوازي (ﻭ) ولا يوازي (ﻭ′) .
أنشىء مستقيما (Δ′) يوازي (Δ) ويقطع كلا من (ﻭ) و (ﻭ′)

25. (ط) مستو ، (Δ) مستقيم و أ نقطة .
أنشىء مستقيما يشمل أ ويقطع (Δ) ويوازي (ط) .

26. (ط) و (ط′) مستويان و أ نقطة .
أنشىء مستقيما يشمل أ ويوازي (ط) و (ط′) .

27. أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط من مستو (ط) .
نفرض أن المستقيمين (أ ب) و (حـ ء) يتقاطعان في النقطة ك
وأن المستقيمين (أ ء) و (ب حـ) يتقاطعان في النقطة ل .
م نقطة لا تنتمي إلى (ط) .
ليكن (ط′) مستويا يقطع كلا من المستقيمات (م أ) ، (م ب) ، (م حـ) ،
(م ء) في النقط α ، β ، δ ، λ على الترتيب .
1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م أ ب) و (م حـ ء) .
ثم عيّن نقطة تقاطع المستقيم (م ك) والمستوي (ط′) .
2) كيف يؤخذ المستوي (ط′) حتى يكون :
(α β) // (δ λ) أو (α λ) // (β δ) ؟

3) لتكن ﻫ نقطة من الفضاء.
أنشيء المستوي (ط′) الذي يشمل النقطة ﻫ بحيث يكون الرباعي α β δ λ متوازي أضلاع.

28. (ط) و (ط′) مستويان غير متوازيين.
أ ب حـ ء متوازي أضلاع في (ط). أ′، ب′، حـ′، ء′ أربع نقط من المستوي (ط′) بحيث تكون المستقيمات (أ أ′)، (ب ب′)، (حـ حـ′)، (ء ء′) متوازية.
ما نوع الرباعي أ′ ب′ حـ′ ء′؟

29. أ ب حـ ء متوازي أضلاع في مستو (ط).
م، ﻫ نقطتان لا تنتميان إلى (ط) بحيث يكون الرباعي أ م حـ ﻫ متوازي أضلاع.
أثبت أن (ب م) // (ء ﻫ) وأن (ب ﻫ) // (م ء).

30. (ط) و (ط′) مستويان متوازيان تماماً.
أ ب حـ مثلث في (ط). م، ﻫ نقطتان متمايزتان من (ط′).
1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (أ ب ﻫ) و (ط′).
2) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (أ حـ م) و (ط′)
3) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (أ ب ﻫ) و (أ حـ م).

31. [أ س) و [ب ع) نصفا مستقيمين غير محتويين في نفس المستوي.
م، ﻫ نقطتان حيث: م ∈ [أ س)؛ ﻫ ∈ [ب ع)؛ أ م = ب ﻫ
1) أنشيء المستوي (ط) الذي يحتوي على [ب ع) ويوازي [أ س)
2) أثبت أن المستقيم الذي يشمل النقطة م ويوازي المستقيم (أ ب) يقطع المستوي (ط) في نقطة م′.
عيّن مجموعة النقط م′ عندما تتغير النقطة م في [أ س).
3) إذا كانت α، β، δ منتصفات القطع [أ ب]، [م م′] و [م ﻫ] على الترتيب، أثبت أن المستوي (α β δ) يوازي المستوي (ط).

32. ا ب حـ ء ا′ ب′ حـ′ ء′ مكعب
أثبت أن المستقيمين (ا ب) و (ء ء′) متعامدان
وأن المستقيمين (ب ء) و (ا′ حـ′) متعامدان .

33. (Δ) و (Δ′) مستقيمان متقاطعان في مستو (ط) .
(ك) و (ك′) مستويان عموديان على (Δ) و (Δ′) على الترتيب .
أثبت أن المستويين (ك) و (ك′) متقاطعان وأن مستقيم تقاطعهما عمودي على (ط) .

34. (ط) و (ط′) مستويان متقاطعان ومستقيم تقاطعهما (Δ) .
ا نقطة لا تنتمي إلى المستويين (ط) و (ط′) .
المستقيم الذي يشمل ا والعمودي على (ط) يقطعه في النقطة هـ .
المستقيم الذي يشمل ا والعمودي على (ط′) يقطعه في النقطة هـ′
1) أثبت أن (Δ) عمودي على المستوي (ا هـ هـ′) .
2) إذا كانت م نقطة تقاطع (Δ) مع المستوي (ا هـ هـ′)
أثبت أن (م ا) عمودي على (Δ) .

35. (ق) و (Δ) مستقيمان متعامدان وغير محتويين في نفس المستوي .
ا نقطة من (ق) ؛ هـ نقطة من (Δ) بحيث يكون (ا هـ) عموديا على (Δ) .
أثبت أنه مهما كانت النقطة ج من (ق) فإن (ج هـ) عمودي على (Δ) .

36. (ق) و (Δ) مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في النقطة ا .
(ق′) المستقيم الذي يشمل ا والعمودي على المستوي المعيّن بالمستقيمين (ق) و (Δ) .
1) أثبت أن (Δ) عمودي على المستوي (ط) المعيّن بالمستقيمين (ق) و (ق′) .
2) أثبت أن (ط) هو المستوي الوحيد الذي يحتوي على (ق) ويعامد (Δ) .

37. (ق) و (Δ) مستقيمان متعامدان وغير محتويين في نفس المستوي .
ا نقطة من (ق) و هـ نقطة من (Δ) بحيث : (ا هـ) ⊥ (Δ) .

(ط) المستوي المعيّن بالنقطة هـ والمستقيم (ق) .
1) أثبت أن (ط) عمودي على (Δ) .
2) أثبت أن (ط) هو المستوي الوحيد الذي يحتوي على (ق) ويعامد (Δ) .

38. 1) (Δ) مستقيم و م نقطة من (Δ) .
(ط) و (ط′) مستويان متقاطِعان وتقاطعهما (Δ) .
(ق) المستقيم من (ط) الذي يشمل م ويعامد (Δ) ؛ (ق′) المستقيم من (ط′) الذي يشمل م ويعامد (Δ) .
أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقطة م ويعامد (Δ)
2) (Δ) مستقيم و م نقطة لا تنتمي إلى (Δ) ، (Δ′) المستقيم الذي يشمل م ويوازي (Δ) .
باستعمال نتيجة السؤال السابق ، أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقطة م ويعامد المستقيم (Δ) .

39. (ط) مستو و ڡ نقطة من الفضاء .
(ق) و (ق′) مستقيمان متقاطعان من (ط) .
حسب التمرين السابق نعلم أنه يوجد مستو وحيد (ك) يشمل ڡ ويعامد (ق) وَيوجد مستو وحيد (ك′) يشمل ڡ ويعامد (ق′) .
أثبت أن المستويين (ك) و (ك′) متقاطعان وأن مستقيم تقاطعهما (Δ) يعامد المستوي (ط) .
استنتج أنه يوجد مستقيم وحيد يشمل ڡ ويعامد المستوي (ط)

40. نعتبر ، في مستو (ط) ، دائرة (د) قطرها ا ب
(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة ا .
حـ نقطة من (Δ) و ڡ نقطة من (د) .
1) أثبت أن المستقيم (ب ڡ) عمودي على المستوي (حـ ا ڡ) .
2) استنتج أن المثلث حـ ڡ ب قائم .

41. ا ب حـ ، ا ب د مثلثان متساويا الساقين وغير محتويين في نفس المستوي حيث حـ ا = حـ ب وَ د ا = د ب .

ي منتصف القطعة [أ ب]

1) أثبت أن المستقيم (أ ب) عمودي على المستوي (حـ ي ء) .

2) أثبت أن المستقيمين (أ ب) و (حـ ء) متعامدان .

42. أ ب حـ مثلث في مستو (ط) .

(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة أ . م نقطة من (Δ) .

م′ نقطة من [ب حـ] ؛ ب′ نقطة من [م حـ] و ب″ نقطة من [أ حـ]

حيث : (م م′) ⊥ (ب حـ) و (ب ب′) ⊥ (م حـ) و (ب ب″) ⊥ (أ حـ)

1) أثبت أن (أ م′) عمودي على (ب حـ) .

2) أثبت أن (ب ب″) عمودي على المستوي (م أ حـ)

3) أثبت أن (م حـ) عمودي على المستوي (ب ب′ ب″)

4) إذا كانت هـ نقطة تقاطع المستقيمين (م م′) و (ب ب′)

وكانت هـ′ نقطة تقاطع المستقيمين (أ م′) و (ب ب″)

أثبت أن (هـ هـ′) عمودي على المستوي (م ب حـ)

43. أ ب حـ ء مستطيل في مستو (ط) .

(Δ) و (Δ′) المستقيمان العموديان على (ط) في النقطتين حـ ، ء على الترتيب .

ن نقطة من (Δ) و ن′ نقطة من (Δ′) حيث (ب ن) ⊥ (أ ن′)

1) أثبت أن (أ ب) عمودي على المستوي (أ ء ن′)

2) أثبت أن (أ ن′) عمودي على المستوي (أ ب ن)

3) أثبت أن (ب ن) عمودي على المستوي (أ ب ن′)

4) إذا كان هـ منتصف القطعة [ن ن′] ، أثبت أن النقطة هـ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [أ ب] .

44. أ ب حـ مثلث في مستو (ط) .

ق نقطة تلاقي أعمدته و (Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة هـ . ء نقطة من (Δ) .

أثبت أن :

(أ ء) ⊥ (ب حـ) و (ب ء) ⊥ (أ حـ) و (حـ ء) ⊥ (أ ب) .

45. ا ب ح ء رباعي وجوه بحيث يكون (أ ء) ⊥ (ب ح) و (ب ء) ⊥ (ا ح) .
المستقيم الذي يشمل النقطة ء ويعامد المستوي (ا ب ح) يقطع هذا المستوي في النقطة ﻫ .
أثبت أن ﻫ هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ا ب ح .

46. 1) ا ب ح ء مربع . عيّن مجموعة النقط ﻫ من الفضاء بحيث تكون الأطوال ﻫ ا ، ﻫ ب ، ﻫ ح ، ﻫ ء متساوية .
2) نفس السؤال إذا كان ا ب ح ء مستطيلا .
3) نفس السؤال إذا كان ا ب ح ء معينا .

47. (ط) و (ط′) مستويان متعامدان .
(Δ) مستقيم عمودي على (ط) و (Δ′) مستقيم عمودي على (ط′) .
1) أثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ′) متعامدان .
2) أثبت أن : (Δ) // (ط′) و (Δ′) // (ط)

48. لتكن ، في مستو (ط) ، دائرة (ى) قطرها ا ب .
(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة ا . ح نقطة من (Δ) .
ﻫ نقطة من (ى) .
1) أثبت أن المستويين (ح ا ﻫ) و (ح ب ﻫ) متعامدان .
2) ا′ نقطة من القطعة] ح ا [.
المستوي (ك) الذي يشمل ا′ ويعامد (ح ا) يقطع (ح ﻫ) في النقطة ﻫ′ ويقطع (ح ب) في النقطة ب′ .
أثبت أن المثلث ا′ ﻫ′ ب′ قائم .

49. (ى) دائرة في مستو (ط) مركزها م .
(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة م .
ح نقطة من (Δ) ؛ ا نقطة من (ى) و (ف) المماس للدائرة (ى) في النقطة ا .
أثبت أن المستوي المعيّن بالنقطة ح والمستقيم (ف) عمودي على المستوي (ا م ح) .

50. ا ب حـ ى رباعي وجوه حيث : ا ب = حـ ى و ا ى = ب حـ و ا حـ = ب ى .
هـ منتصف القطعة [ا ب] و هـ' منتصف القطعة [حـ ى] .
1) أثبت أن المستويين (هـ حـ ى) و (هـ' ا ب) متعامدان
2) أثبت أن المستوي (هـ حـ ى) عمودي على المستويين (ا ب حـ) و (ا ب ى)
وأن المستوي (هـ' ا ب) عمودي على المستويين (ا حـ ى) و (ب حـ ى) .

محتويات الكتاب

الجزء الأول

الجزء الثاني

الباب السادس :

الباب السابع :

الباب الثامن :

الباب التاسع :

الباب العاشر :